Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets Johanna Richter, M.Sc. Tobias Schmid, M.Sc.

WS2016/17
30.11.2016

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

7. Übungsblatt

Aufgabe 37:

(a) Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ Potenzreihen mit Konvergenzradien $R_1 > 0$ bzw. $R_2 > 0$. Zeigen Sie, dass die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k\right) z^n$ Konvergenzradius $R \geq \min\{R_1, R_2\}$ hat und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k\right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right)$$

für $|z| < \min\{R_1, R_2\}$ gilt.

(b) Berechnen Sie für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ den Konvergenzradius R der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} z^n$$

und geben Sie für $|z| < R$ den Reihenwert an.

Hinweis: Cauchyprodukt geometrischer Reihen, Aufgabe 13 (a).

Aufgabe 38:

Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die folgenden Potenzreihen? Bestimmen Sie im Falle der Konvergenz jeweils den Reihenwert.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$.

Aufgabe 39:

Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist der n-te *Dirichlet-Kern* D_n durch $D_n(z) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikz}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gegeben. Zeigen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und $z \in D := \{z \in \mathbb{C} | \sin(z) \neq 0\}$ die Identitäten

$$D_n(2z) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(2kz) = \frac{\sin((2n+1)z)}{\sin(z)}.$$

Hinweis: Geometrische Summenformel.

— Bitte wenden! —

Aufgabe 40:
Sei $D := \{z \in \mathbb{C} | \cos(z) \neq 0\}$ und $\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$ für alle $z \in D$. Zeigen Sie

(i) $\sin(2x) = \frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$,

(ii) $\cos(2x) = \frac{1-\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}$

für alle $x \in D \cap \mathbb{R}$.

Aufgabe 41:
Seien V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume.

(a) Sei W^V die Menge aller Abbildungen von V nach W. Für alle $f, g \in W^V$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ sei

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x), \\ (\alpha \cdot f)(x) &= \alpha f(x). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass W^V mit diesen Verknüpfungen $+ : W^V \times W^V \to W^V$ und $\cdot : \mathbb{K} \times W^V \to W^V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist.

(b) Sei $L(V, W)$ die Menge aller linearen Abbildungen von V nach W. Zeigen Sie, dass $L(V, W)$ ein Untervektorraum von W^V ist.

Aufgabe 42:
Welche der Mengen

(i) $\left\{f \in \mathbb{R}^{[-1,1]} \,|\, f \text{ hat mindestens eine Nullstelle}\right\}$,

(ii) $\{(a_n) \in c \,|\, \lim_{n\to\infty} a_n = a\}$ mit einem festen $a \in \mathbb{R}$,

(iii) $\left\{f \in \mathbb{R}^{[-1,1]} \,|\, f(0) = 0\right\}$

sind Untervektorräume des $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bzw. des $\mathbb{R}^{[-1,1]}$?

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 37, 39 und 41 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.