Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets Johanna Richter, M.Sc. Tobias Schmid, M.Sc.

WS2016/17
02.12.2016

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 37:

(a) Sei $|z| < \min\{R_1, R_2\}$. Nach (a) im Abschnitt 7.14 der Vorlesung konvergieren die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ absolut. Ihr Cauchy-Produkt lautet

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} z^{n-k} b_k z^k = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k\right) z^n.$$

Nach Satz im Abschnitt 7.10 konvergiert es absolut und für den Reihenwert gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k\right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right).$$

Nach Folgerung (a) aus dem Abschnitt 7.14 des Skriptes gilt $R \geq \min\{R_1, R_2\}$.

(b) Für $k = 0$ ist $\binom{n+k}{k} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Also liegt die geometrische Reihe vor. Für $k = 1$ ist $\binom{n+k}{k} = \binom{n+1}{1} = \frac{(n+1)!}{(n+1-1)!1!} = n + 1$. Nach Beispiel im Abschnitt 7.10 des Skriptes liegt also das Cauchyprodukt der geometrischen Reihe mit sich selbst vor. Es liegt die Vermutung nahe, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k} z^n = \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) \cdot_{\mathrm{CP}} \cdots \cdot_{\mathrm{CP}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)}_{k \text{ Faktoren}}$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$, wobei $\cdot_{\mathrm{CP}}$ das Cauchyprodukt bezeichnet. Ein Beweis gelingt mit vollständiger Induktion.

- *IA* ($k = 0$): klar.
- *IS* ($k \rightsquigarrow k + 1$): Für ein $k \in \mathbb{N}_0$ gelte die *IH*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k} z^n = \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) \cdot_{\mathrm{CP}} \cdots \cdot_{\mathrm{CP}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)}_{k \text{ Faktoren}}.$$

Nach Teilaufgabe (a) gilt für $k+1$

$$\underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) \cdot_{\mathrm{CP}} \cdots \cdot_{\mathrm{CP}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)}_{k \text{ Faktoren}} \cdot_{\mathrm{CP}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) \overset{\text{(IH)}}{=} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} z^n\right) \cdot_{\mathrm{CP}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} \binom{m+k}{k} \cdot 1\right) z^n$$

$$\overset{\text{A 13 (a)}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k+1}{k+1} z^n.$$

Nach Teilaufgabe (a) gilt $R \geq 1$ und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} z^n = \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) \cdot \ldots \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)}_{k \text{ Faktoren}} = \left(\frac{1}{1-z}\right)^k$$

für alle $|z| < 1$. Ferner gilt

$$\binom{n+k}{k} = \frac{(n+k)!}{n!k!} = \frac{\prod_{j=1}^{n+k} j}{\left(\prod_{j=1}^{n} j\right)\left(\prod_{j=1}^{k} j\right)} = \frac{\prod_{j=n+1}^{n+k} j}{\prod_{j=1}^{k} j} = \prod_{j=1}^{k} \frac{n+j}{j} \geq 1$$

für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$. Damit ist

$$\left|\binom{n+k}{k} z^n\right| \geq 1$$

für alle $|z| \geq 1$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Also ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} z^n$ divergent für alle $|z| \geq 1$. Nach Folgerung (b) aus dem Abschnitt 7.14 des Skriptes gilt $R \leq 1$. Insgesamt also $R = 1$.

□

Aufgabe 38: A30. □

Aufgabe 39:
Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $z \in D$. Wir zeigen die erste Identität. Nach (0) im Abschnitt 7.11 des Skriptes ist $e^0 = 1$. Also gilt

$$\begin{aligned} D_n(2z) &= \sum_{k=-n}^{n} e^{\mathrm{i}2kz} = e^0 + \sum_{k=-n}^{1} e^{\mathrm{i}2kz} + \sum_{k=1}^{n} e^{\mathrm{i}2kz} = 1 + \sum_{k=1}^{n} e^{-2\mathrm{i}kz} + \sum_{k=1}^{n} e^{\mathrm{i}2kz} \\ &= 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\mathrm{i}2kz} + e^{-\mathrm{i}2kz}}{2} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(2kz), \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung die Definition des Cosinuses aus Abschnitt 7.12 des Skriptes ist.

Für die zweite Identität benötigen wir die *verallgemeinerte geometrische Summenformel.* Sei $w \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ und $m \in \mathbb{N}_0$. Es gilt

$$\begin{aligned}
& w \sum_{k=-m}^{m} w^k = \sum_{k=-m}^{m} w^{k+1} = \sum_{k=-m+1}^{m+1} w^k = w^{m+1} - w^{-m} + \sum_{k=-m}^{m} w^k \\
\Rightarrow\ & (w-1) \sum_{k=-m}^{m} w^k = w^{m+1} - w^{-m} \\
\Rightarrow\ & \sum_{k=-m}^{m} w^k = \frac{w^{m+1} - w^{-m}}{w-1}.
\end{aligned}$$

Wir zeigen noch, dass $e^{\mathrm{i}z} \notin \{0,1\}$ für $z \in D$ gilt. Nach (2) im im Abschnitt 7.12 des Skriptes ist $e^{\mathrm{i}w} \neq 0$ für alle $w \in \mathbb{C}$. Ist $e^w = 1$ für ein $w \in \mathbb{C}$, so gilt nach (6) und (2) im Abschnitt 7.11 des Skriptes auch $e^{\overline{w}} = 1$. Damit ist nach (1) im selben Abschnitt auch

$$1 = 1 \cdot 1 = e^w e^{\overline{w}} = e^{w+\overline{w}} = e^{2\,\mathrm{Re}(w)}.$$

Nach (3) im selben Abschnitt, ist aber $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist $\mathrm{Re}(w) = 0$. Nach der Eulerformel aus (2) im Abschnitt 7.12 des Skriptes gilt

$$1 = e^w = e^{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(w)} = \cos(\mathrm{Im}(w)) + \mathrm{i}\sin(\mathrm{Im}(w)).$$

Also ist $\sin(w) = 0$ und $w \notin D$.

Also ist die verallgemeinerte geometrische Summenformel anwendbar und nach (0) im Abschnitt 7.12 des Skriptes folgt

$$\begin{aligned}
D_n(2z) &= \sum_{k=-n}^{n} e^{2\mathrm{i}kz} = \sum_{k=-n}^{n} \left(e^{2\mathrm{i}z}\right)^k = \frac{\left(e^{2\mathrm{i}z}\right)^{n+1} - \left(e^{2\mathrm{i}z}\right)^{-n}}{e^{2\mathrm{i}z} - e^0} = \frac{e^{2\mathrm{i}z(n+1)} - e^{-2\mathrm{i}nz}}{e^{2\mathrm{i}z} - e^0} \\
&= \frac{e^{\mathrm{i}z}\left(e^{\mathrm{i}(2n+1)z} - e^{-\mathrm{i}(2n+1)z}\right)}{e^{\mathrm{i}z}\left(e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}\right)} = \frac{\frac{e^{\mathrm{i}(2n+1)z} - e^{-\mathrm{i}(2n+1)z}}{2\mathrm{i}}}{\frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}} = \frac{\sin((2n+1)z)}{\sin(z)},
\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung die Definition des Sinuses aus Abschnitt 7.12 des Skriptes ist. □

Aufgabe 40: Heuser, S. 444. □

Aufgabe 41:

(a) Wir weisen die Axiome (V1)-(V7) aus Abschnitt 8.2 nach. Seien dazu im Folgenden $f, g, h \in W^V$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ beliebig.

- *(V1):* Für alle $x \in V$ gilt

  $$\begin{aligned}
  ((f+g)+h)(x) &= (f+g)(x) + h(x) = f(x) + g(x) + h(x) = f(x) + (g+h)(x) \\
  &= (f+(g+h))(x).
  \end{aligned}$$

  Also ist tatsächlich $f + (g+h) = (f+g) + h$.

- *(V2):* Für alle $x \in V$ gilt

  $$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x).$$

  Also ist tatsächlich $f + g = (g + f)$.

- *(V3):* Die Abbildung $f_0 : V \to W$, die durch $f_0(x) = 0$ für alle $x \in V$ definiert ist erfüllt

  $$(f_0 + f)(x) = f_0(x) + f(x) = 0 + f(x) = f(x)$$

  für alle $x \in V$. Also ist f_0 die Null in W^V.

- *(V4):* Definiere $-f$ durch $(-f)(x) = -f(x)$ für alle $x \in V$. Dann gilt

  $$(f + (-f))(x) = f(x) - f(x) = 0 = f_0(x)$$

  für alle $x \in V$. Also ist $(-f)$ die additive Inverse von f.

- *(V5):* Für alle $x \in V$ gilt

  $$((\alpha\beta) \cdot f)(x) = (\alpha\beta)f(x) = \alpha(\beta f(x)) = (\alpha \cdot (\beta \cdot f))(x).$$

  Also gilt tatsächlich $(\alpha\beta) \cdot f = \alpha \cdot (\beta \cdot f)$.

- *(V6):*

- *(V7):*

Wikipedia

(b) gleichfalls.

□

Aufgabe 42: