Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets   Johanna Richter, M.Sc.   Tobias Schmid, M.Sc.

WS2016/17
07.12.2016

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

8. Übungsblatt

Aufgabe 43:
Untersuchen Sie

(i) die Funktionenfolge (f_n) mit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+n^2x^4}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$,

(ii) die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ mit $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g_n(x) = e^{-n(1+x+x^2)}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$, sowie

(iii) die Funktionenfolge (h_n) mit $h_n : [a,1] \to \mathbb{R}$ $h_n(x) = \sqrt[n]{n^2x}$ für alle $x \in [a,1]$ und alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $0 \leq a < 1$ fest ist,

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

Aufgabe 44:
Untersuchen Sie

(i) die Funktionenfolge (f_n) mit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f_n(x) = \frac{n^2x}{1+n^5x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$,

(ii) die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ mit $g_n : (-1,1] \to \mathbb{R}$ und $g_n(x) = x^n(1-x)$ für alle $x \in (-1,1]$ und alle $n \in \mathbb{N}$, sowie

(iii) die Funktionenfolge (h_n) mit $h_n : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ und $h_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ für alle $x \in [a,\infty)$ und alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $0 \leq a < 1$ fest ist,

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

— Bitte wenden! —

Aufgabe 45:

Bestimmen Sie jeweils eine Konstante y_0 so, dass die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf ihrem ganzen Definitionsbereich D stetig ist.

(i) $D = [0,1],\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x^2-4)(x-1)} & \text{für } x \in D \setminus \{1\}\,, \\ y_0 & \text{für } x = 1. \end{cases}$

(ii) $D = (0,\infty),\ f(x) = \begin{cases} \frac{x^r-1}{x-1} & \text{für } x \in D \setminus \{1\}\,, \\ y_0 & \text{für } x = 1, \end{cases}$ für ein festes $r \in \mathbb{Q}$.

(iii) $D = [0,\pi],\ f(x) = \begin{cases} \frac{x\sin(x)}{\cos(x)-1} & \text{für } x \in D \setminus \{0\}\,, \\ y_0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

Aufgabe 46:

Bestimmen Sie jeweils eine Konstante y_0 so, dass die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf ihrem ganzen Definitionsbereich D stetig ist.

(i) $D = (0,\infty),\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2-x} - \frac{12}{8-x^3}\right) & \text{für } x \in D \setminus \{2\}\,, \\ y_0 & \text{für } x = 2. \end{cases}$

(ii) $D = [-1,1],\ f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{|x|} + \sqrt{\frac{1}{|x|}}} - \sqrt{\frac{1}{|x|} - \sqrt{\frac{1}{|x|}}} & \text{für } x \in D \setminus \{0\}\,, \\ y_0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

(iii) $D = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],\ f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)} & \text{für } x \in D \setminus \{0\} \\ y_0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

Aufgabe 47:

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Zeigen Sie, dass es ein $x_M \in \mathbb{R}$ gibt, für welches

$$|f(x)| \le |f(x_M)|$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ ausfällt.

Aufgabe 48:

Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) = f(1) =: y_0$. Zeigen Sie, dass dann ein $x_1 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ existiert mit der Eigenschaft

$$f(x_1) = f\left(\frac{1}{2} + x_1\right).$$

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 43, 45 und 47 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.