

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

9. Übungsblatt

Aufgabe 49:

Sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $N := \{x \in D \mid f(x) = 0\}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

- (a) N ist abgeschlossen.
- (b) Ist N nach unten beschränkt und nicht leer, so hat N ein Minimum.

Aufgabe 50:

Berechnen Sie die in der folgenden Tabelle

φ	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
$\cos(\varphi)$	1		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		0				-1
$\sin(\varphi)$	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1				0
$\tan(\varphi)$	0		1		n.d. ¹				0

fehlenden Werte für

- (a) $\varphi = \frac{3}{4}\pi$,
- (b) $\varphi \in \{\frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\}$ und
- (c) $\varphi \in \{\frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi\}$.

Aufgabe 51:

Seien

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \frac{3}{2} \leq |z| \leq 5 \right\}, \quad B = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1 \}, \quad C = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid -\frac{2}{3}\pi \leq \arg(z) \leq -\frac{1}{3}\pi \right\}.$$

- (a) Deuten Sie die Mengen A , B und $S := C \cap A$ geometrisch.
- (b) Skizzieren Sie die Menge $T := B \cup S \cup e^{i\frac{2\pi}{3}}S \cup e^{-i\frac{2\pi}{3}}S$.

¹nicht definiert

Aufgabe 52:

Berechnen Sie für die komplexen Zahlen $z = \sqrt{3} + i$ und $w = 2 + 2\sqrt{3}i$ die Darstellung in Polarkoordinaten von

- (i) $\frac{1}{z}$,
- (ii) $\left(\frac{1}{z}\right)^{13}$,
- (iii) w^7 und
- (iv) $\frac{w^7}{z^{13}}$.

Aufgabe 53:

(a) Zeigen Sie, dass für $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$ der Abstand der Punkte $e^{i\varphi}$ und $e^{i\psi}$ durch

$$\left|e^{i\varphi} - e^{i\psi}\right| = 2 \left|\sin\left(\frac{\varphi - \psi}{2}\right)\right|$$

gegeben ist.

(b) Sei $2 \leq n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die n -ten Einheitswurzeln — also Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ für $z \in \mathbb{C}$ — ein n -Eck mit Umfang $L_n = 2n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ bilden.

(c) Zeigen Sie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = 2\pi.$$

(d) Interpretieren Sie die letzte Gleichung und zeichnen Sie für $n = 6$ ein Bild.

Aufgabe 54:

Zeigen Sie die folgenden Identitäten.

- (i) $\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y, x + y \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$.
- (ii) $\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|\arctan(x) + \arctan(y)| < \frac{\pi}{2}$.
- (iii) $(\cosh(x) + \sinh(x))^n = \cosh(nx) + \sinh(nx)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}$.
- (iv) $\operatorname{Arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- (v) $\operatorname{Artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ für alle $x \in (-1, 1)$.

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 49, 51 und 53 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.