

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 9. Übungsblatt

Aufgabe 49:

- (a) Sei (x_n) eine konvergente Folge in N mit $x_n \rightarrow x_0$ für $n \rightarrow \infty$. Zu zeigen ist, dass $x_0 \in N$ (Definition im Abschnitt 9.14 der Vorlesung).

Da $N \subseteq D$ und D abgeschlossen ist, gilt $x_0 \in D$. Weil f stetig ist, gilt

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{f(x_n)}_{\substack{x_n \in N \\ = 0}} = 0.$$

Also ist in der Tat $x_0 \in N$.

- (b) Nach Teilaufgabe (a) ist N abgeschlossen. Ferner ist N nach Voraussetzung nicht leer und nach unten beschränkt. Nach Satz im Abschnitt 9.14 des Skriptes gilt $\inf N \in N$. Also hat N ein Minimum.

□

Aufgabe 50:

- (a) Es gilt

$$\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \cos\left(\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \stackrel{10.2(2)}{=} -\cos\left(-\frac{1}{4}\pi\right) \stackrel{10.2(12)}{=} -\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

sowie

$$\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \sin\left(\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \stackrel{10.2(2)}{=} \sin\left(-\frac{1}{4}\pi\right) \stackrel{10.2(12)}{=} -\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- (b) Nach den Additionstheoremen (3) aus Abschnitt 7.12 der Vorlesung gilt für alle $\varphi \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \sin(3\varphi) &= \sin(2\varphi + \varphi) = \sin(2\varphi)\cos(\varphi) + \cos(2\varphi)\sin(\varphi) \\ &= (\sin(\varphi)\cos(\varphi) + \cos(\varphi)\sin(\varphi))\cos(\varphi) + (\cos(\varphi)\cos(\varphi) - \sin(\varphi)\sin(\varphi))\sin(\varphi) \\ &= 2\sin(\varphi)\cos^2(\varphi) + \sin(\varphi)(\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)) = \sin(\varphi)(3\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)). \end{aligned}$$

Nach Abschnitt 7.12 (2) der Vorlesung gilt $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dadurch lässt sich $\cos^2(\varphi)$ in der obigen Gleichung eliminieren und man erhält

$$\sin(3\varphi) = \sin(\varphi)(3(1 - \sin^2(\varphi)) - \sin^2(\varphi)) = \sin(\varphi)(3 - 4\sin^2(\varphi)).$$

Einsetzen von $\varphi = \frac{1}{3}\pi$ liefert

$$0 = \sin(\pi) = \sin\left(3 \cdot \frac{1}{3}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) \left(3 - 4\sin^2\left(\frac{1}{3}\pi\right)\right).$$

Nach (9) im Abschnitt 10.2 der Vorlesung gilt $\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) \neq 0$. Folglich ist

$$\left|\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Nach Abschnitt 10.3 der Vorlesung ist $\sin(\varphi) > 0$ für $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2}]$. Also ist $\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Nach dem gleichen Abschnitt ist $\cos(\varphi) > 0$ für $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2})$ und damit

$$\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{1}{3}\pi\right)} = \frac{1}{2},$$

sowie

$$\tan\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)}{\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)} = \sqrt{3}.$$

Wie in Teilaufgabe (a) folgt

$$\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \cos\left(\pi - \left(\frac{1}{3}\pi\right)\right) = -\cos\left(-\frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2},$$

sowie

$$\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \sin\left(\pi - \left(\frac{1}{3}\pi\right)\right) = -\sin\left(-\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

und

$$\tan\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)}{\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)} = -\sqrt{3}.$$

(c) Die bereits zitierten Additionstheoreme liefern

$$\cos(2\varphi) = \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathbb{C}.$$

Durch Beziehung $\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1$ für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ lässt sich $\sin^2(\varphi)$ in der obigen Gleichung eliminieren. Dies liefert

$$\frac{\cos(2\varphi) + 1}{2} = \cos^2(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen von $\varphi = \frac{1}{6}\pi$ und Ausnutzen des bekannten Funktionswertes bei $\varphi = \frac{1}{3}\pi$ liefert

$$\cos^2\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) + 1}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Damit folgt

$$\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{1}{6}\pi\right)} = \frac{1}{2},$$

sowie

$$\tan\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)}{\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right)} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Wie in Teilaufgabe (a) bestimmen sich die restlichen Werte

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) &= \cos\left(\pi - \left(\frac{1}{6}\pi\right)\right) = -\cos\left(-\frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) &= \sin\left(\pi - \left(\frac{1}{6}\pi\right)\right) = \sin\left(-\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}, \quad \text{sowie} \\ \tan\left(\frac{5}{6}\pi\right) &= \frac{\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)}{\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right)} = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 51:

(a) Siehe auch die Abbildung (1a).

- A ist der abgeschlossene Kreisring um 0 mit Innenradius $\frac{3}{2}$ und Außenradius 5.
- B ist die abgeschlossene Kreisscheibe um 0 mit Radius 1.
- $S = C \cap A = \{z \in \mathbb{C} \mid -\frac{2}{3}\pi \leq \arg(z) \leq -\frac{1}{3}\pi \wedge \frac{3}{2} \leq |z| \leq 5\}$ ist ein abgeschlossener Ringsektor von A mit Zentriwinkel von 60° .

(b) Sei $w \in e^{-i\frac{2\pi}{3}}S$ beliebig. Es existiert dann ein $z \in S$ mit $w = e^{-i\frac{2\pi}{3}}z$. Wegen $|z| \geq \frac{3}{2}$ ist $z \neq 0$. Betrachte seine Darstellung in Polarkoordinaten $z = re^{i\varphi}$. Nach Definition von $S_1 := S$ ist $-\frac{2}{3}\pi \leq \varphi \leq -\frac{1}{3}\pi$. Dann gilt

$$w = e^{-i\frac{2\pi}{3}}z = e^{-i\frac{2\pi}{3}}re^{i\varphi} = re^{i(\varphi - \frac{2\pi}{3})} = re^{i(\varphi - \frac{2\pi}{3} + 2\pi)} = re^{i(\varphi + \frac{4\pi}{3})}.$$

Also gilt $|w| = |z|$ und $\arg w = \arg z + \frac{4\pi}{3}$. D.h. $S_3 := e^{-i\frac{2\pi}{3}}S$ ist der um 120° im Uhrzeigersinn gedrehte Ringsektor S_1 . Entsprechend ist $S_2 := e^{i\frac{2\pi}{3}}S$ der um 120° gegen den Uhrzeigersinn gedrehte Ringsektor S_1 . Eine Skizze von T ist in der Abbildung (1b) zu finden.

□

Aufgabe 52:

Zunächst werden z und w in Polarkoordinaten dargestellt. Für die Beträge gilt

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2, \quad |w| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4.$$

Für die Argumenten gilt nach Abschnitt 10.6 der Vorlesung ($\operatorname{Re}(z), \operatorname{Re}(w) > 0$)

$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}, \quad \arg(w) = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}.$$

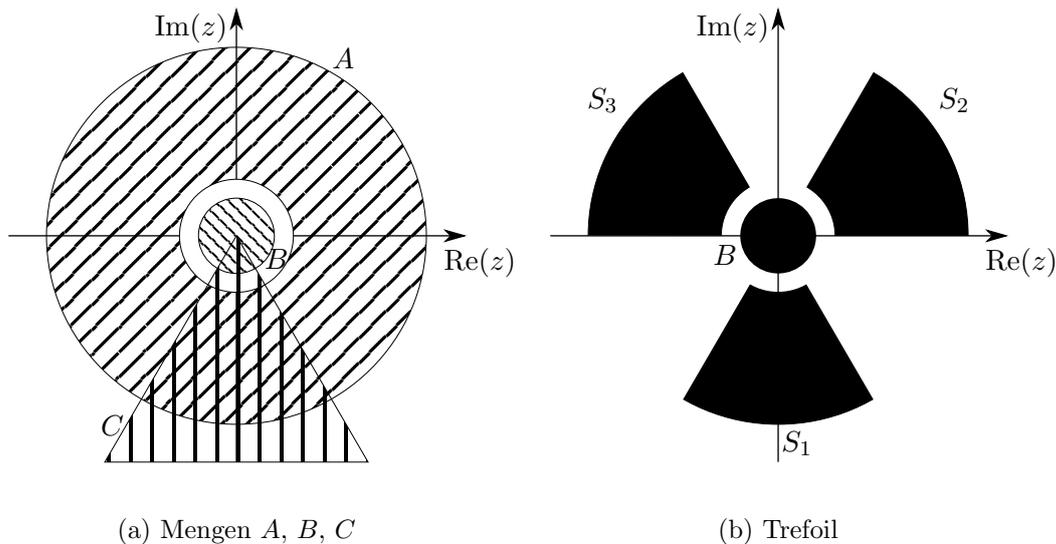


Abbildung 1: Skizzen zur Aufgabe 51

Es folgt damit

$$z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad w = 4e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

(i) $\frac{1}{z} = \frac{1}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}},$

(ii) $\left(\frac{1}{z}\right)^{13} = \left(\frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^{13} = \left(\frac{1}{2}\right)^{13} e^{-i\frac{13}{6}\pi} = \frac{1}{8192}e^{i\pi(2-\frac{13}{6})} = \frac{1}{8192}e^{-i\frac{\pi}{6}},$

(iii) $w^7 = \left(4e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^7 = 4^7 e^{i\frac{7}{3}\pi} = 2^{14}e^{i\pi(2+\frac{1}{3})} = 16384e^{i\frac{\pi}{3}}$ und

(iv) $\frac{w^7}{z^{13}} = \frac{2^{14}e^{i(\frac{7}{3}-\frac{\pi}{6})}}{2^{13}} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}.$

□

Aufgabe 53:

(a) Es gilt

$$e^{i\varphi} - e^{i\psi} = e^{i\frac{\varphi+\psi}{2}} \cdot \left(e^{i\varphi - \frac{\varphi+\psi}{2}} - e^{i\psi - \frac{\varphi+\psi}{2}} \right) = e^{i\frac{\varphi+\psi}{2}} \cdot \left(e^{i\frac{\varphi-\psi}{2}} - e^{-i\frac{\varphi-\psi}{2}} \right) = 2ie^{i\frac{\varphi+\psi}{2}} \cdot \sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right).$$

Deshalb ist tatsächlich $|e^{i\varphi} - e^{i\psi}| = \left| 2e^{i\frac{\varphi+\psi}{2}} \cdot \sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right) \right| = 2 \left| \sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right) \right|.$

(b) Die n -ten Einheitswurzeln sind nach Abschnitt 10.6 der Vorlesung durch

$$w_n := w_0 := 1 = e^{i\frac{2\pi}{n} \cdot 0}, \quad w_1 := e^{i\frac{2\pi}{n} \cdot 1}, \quad \dots, \quad w_{n-1} := e^{i\frac{2\pi}{n} \cdot (n-1)}$$

gegeben. Nach Teilaufgabe (a) gilt

$$|w_{k+1} - w_k| = \left| e^{i\frac{2\pi}{n} \cdot (k+1)} - e^{i\frac{2\pi}{n} \cdot k} \right| = 2 \left| \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \right|$$

für alle $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Also bilden w_k mit $k \in \{0, \dots, n-1\}$ ein reguläres n -Eck vom Umfang

$$L_n = |w_{n-1} - w_0| + \sum_{k=0}^{n-2} |w_{k+1} - w_k| = 2n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

(c) Nach Beispiel im Abschnitt 9.4 des Skriptes gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} = \lim_{x \rightarrow 0} 2\pi \frac{\sin(x)}{x} = 2\pi.$$

(d) Das Ergebnis lässt sich wie folgt verstehen: Das von den w_k ($k \in \{0, \dots, n-1\}$) aufgespannte reguläre n -Eck approximiert immer besser den Einheitskreis $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$. Der Umfang der Rechtecke approximiert den Umfang der \mathbb{S}^1 . Eine Skizze für $n = 6$ ist in der Abbildung (2) zu finden.

□

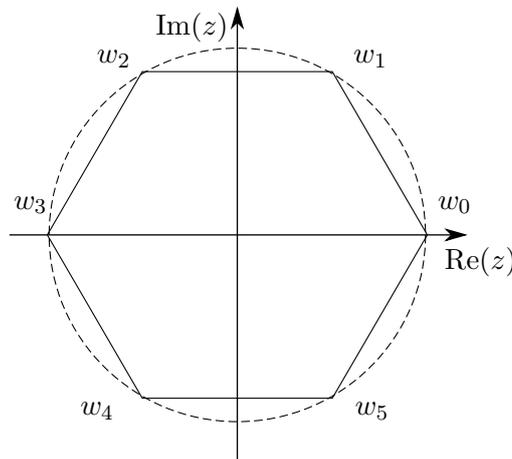


Abbildung 2: Sechste Einheitswurzeln

Aufgabe 54:

(i) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y, x + y \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$. Nach den Additionstheoremen (3) aus Abschnitt 7.12 des Skriptes gilt

$$\begin{aligned} \tan(x + y) &= \frac{\sin(x + y)}{\cos(x + y)} = \frac{\sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)}{\cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)} \\ &= \frac{\cos(x) \cos(y)}{\cos(x) \cos(y)} \cdot \frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\sin(y)}{\cos(y)}}{1 - \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \frac{\sin(y)}{\cos(y)}} = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \tan(y)}. \end{aligned}$$

(ii) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|\arctan(x) + \arctan(y)| < \frac{\pi}{2}$. Definiere $X := \arctan(x)$ und $Y := \arctan(y)$. Nach Voraussetzung ist also $X, Y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \subseteq (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})^c$. Nach Teilaufgabe

(i) folgt dann

$$\tan(X + Y) = \frac{\tan(X) + \tan(Y)}{1 - \tan(X)\tan(Y)}.$$

Nach Abschnitt 10.5 des Skriptes bildet \tan das Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ bijektiv auf \mathbb{R} ab mit der Umkehrfunktion $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Folglich ist $\arctan \circ \tan = \text{id}_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$ und $\tan \circ \arctan = \text{id}_{\mathbb{R}}$. Die letzte Identität impliziert

$$\begin{aligned} X + Y &= \arctan(\tan(X + Y)) = \arctan\left(\frac{\tan(X) + \tan(Y)}{1 - \tan(X)\tan(Y)}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{\tan(\arctan(x)) + \tan(\arctan(y))}{1 - \tan(\arctan(x))\tan(\arctan(y))}\right) = \arctan\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right). \end{aligned}$$

(iii) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$. Es gilt nach Definition aus Abschnitt 10.7 des Skriptes

$$\begin{aligned} (\cosh(x) + \sinh(x))^n &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^n = (e^x)^n = e^{xn} \\ &= \left(\frac{e^{xn} + e^{-xn}}{2} + \frac{e^{xn} - e^{-xn}}{2}\right) = \cosh(xn) + \sinh(xn). \end{aligned}$$

(iv) Sei $x \in \mathbb{R}$. Nach Abschnitt 10.8 des Skriptes ist $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bijektiv. Also existiert ein eindeutig bestimmtes $X \in \mathbb{R}$ mit $x = \sinh(X)$. Ferner ist nach Abschnitt 9.12 die Exponentialabbildung $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ bijektiv mit \ln als Umkehrfunktion. Es ist also $\ln \circ \exp = \text{id}_{\mathbb{R}}$. Es gilt damit

$$\begin{aligned} \text{Arsinh}(x) &= \text{Arsinh}(\sinh(X)) = X = \ln(e^X) = \ln\left(\frac{e^X - e^{-X}}{2} + \frac{e^X + e^{-X}}{2}\right) \\ &= \ln(\sinh(X) + \cosh(X)). \end{aligned}$$

Mit $\cosh^2(X) - \sinh^2(X) = 1$, sowie $\cosh(x) \geq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (Abschnitt 10.7 des Skriptes) folgt weiter

$$\begin{aligned} \text{Arsinh}(x) &= \ln(\sinh(X) + \cosh(X)) = \ln\left(\sinh(X) + \sqrt{\cosh^2(X)}\right) \\ &= \ln\left(\sinh(X) + \sqrt{1 + \sinh^2(X)}\right) = \ln\left(1 + \sqrt{1 + x^2}\right). \end{aligned}$$

(v) Sei $x \in (-1, 1)$. Nach Abschnitt 10.8 des Skriptes ist $\tanh : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ bijektiv mit Artanh als Umkehrfunktion. Sei also $X := \text{Artanh}(x)$ bzw. $\tanh(X) = x$. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+\tanh(X)}{1-\tanh(X)}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+\frac{\sinh(X)}{\cosh(X)}}{1-\frac{\sinh(X)}{\cosh(X)}}\right) \\ &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\cosh(X) + \sinh(X)}{\cosh(X) - \sinh(X)}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\frac{e^X + e^{-X}}{2} + \frac{e^X - e^{-X}}{2}}{\frac{e^X + e^{-X}}{2} - \frac{e^X - e^{-X}}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{e^X}{e^{-X}}\right) = \frac{1}{2} \ln(e^{2X}) = X = \text{artanh}(x) \end{aligned}$$

□