Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets Johanna Richter, M.Sc. Tobias Schmid, M.Sc.

WS2016/17
23.12.2016

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 10. Übungsblatt

Aufgabe 55:

(a) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = x + \frac{\sin(x)}{2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Es ist klar, dass g auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist. Für ihre Ableitung g' gilt

$$g'(x) = 1 + \frac{\cos(x)}{2} \geq 1 - \frac{|\cos(x)|}{2} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach einer Folgerung aus dem Mittelwertsatz (siehe (3) im Abschnitt 11.8 des Skriptes), ist g streng monoton wachsend. Da bereits $g(0) = 0$ gilt, gibt es keine weitere Nullstelle von g.

(b) Als Komposition differenzierbarer Funktionen ist f in allen $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar und es gilt nach den Regeln aus Abschnitt 11.2 des Skriptes

$$f'(x) = \frac{x + \frac{\sin(x)}{2} - x\left(1 + \frac{\cos(x)}{2}\right)}{\left(x + \frac{\sin(x)}{2}\right)^2} = \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{2\left(x + \frac{\sin(x)}{2}\right)^2}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Bei $x = 0$ überprüfen wir die Definition der Differenzierbarkeit aus Abschnitt 11.1 des Skriptes. Für den Differenzenquotienten gilt

$$\begin{aligned} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\frac{h}{h + \frac{\sin(h)}{2}} - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{1 + \frac{\sin(h)}{2h}} - \frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{1}{h}\left(\frac{1 - \frac{\sin(h)}{h}}{1 + \frac{\sin(h)}{2h}}\right) = \left(\frac{1}{1 + \frac{\sin(h)}{2h}}\right)\left(\frac{1 - \frac{\sin(h)}{h}}{h}\right) \end{aligned}$$

für alle $h \neq 0$. Nach einem Beispiel aus Abschnitt 9.4 des Skriptes gilt

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{1 + \frac{\sin(h)}{2h}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Ferner ist

$$\left(\frac{1 - \frac{\sin(h)}{h}}{h}\right) = \frac{1}{h}\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} h^{2n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} h^{2n-1} \overset{\text{Index-}}{\underset{\text{shift}}{=}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+3)!} h^{2n+1}$$

für alle $h \neq 0$. Die rechte Seite dieser Gleichung ist eine Potenzreihe in h mit Konvergenzradius $R = \infty$. Diese definiert also eine auf ganz $\mathbb{R}$ stetige Funktion und es folgt

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{1 - \frac{\sin(h)}{h}}{h}\right) = 0.$$

Also ist f differenzierbar in $x = 0$ und

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \left(\lim_{h\to 0} \frac{1}{1 + \frac{\sin(h)}{2h}} \right) \cdot \left(\lim_{h\to 0} \frac{1 - \frac{\sin(h)}{h}}{h} \right) = \frac{2}{3} \cdot 0 = 0.$$

□

Aufgabe 56:

(a) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = x + \frac{\ln(1+x^2)}{2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Es ist klar, dass g auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist. Für ihre Ableitung g' gilt

$$g'(x) = 1 + \frac{2x}{2(1+x^2)} = 1 + \frac{x}{1+x^2} \geq 1 - \frac{2\,|x|}{2(1+x^2)} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei wir $|2x| \leq 1 + x^2$ ausgenutzt haben. Nach einer Folgerung aus dem Mittelwertsatz (siehe (3) im Abschnitt 11.8 des Skriptes), ist g streng monoton wachsend. Da bereits $g(0) = 0$ gilt, gibt es keine weitere Nullstelle von g.

(b) Als Komposition differenzierbarer Funktionen ist f in allen $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar und es gilt nach den Regeln aus Abschnitt 11.2 des Skriptes

$$f'(x) = \frac{2x\left(x + \frac{\ln(1+x^2)}{2}\right) - x^2\left(1 + \frac{x}{1+x^2}\right)}{\left(x + \frac{\ln(1+x^2)}{2}\right)^2} = \frac{x^2 + x\ln(1+x^2) - \frac{x^3}{1+x^2}}{\left(x + \frac{\ln(1+x^2)}{2}\right)^2}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Bei $x = 0$ überprüfen wir die Definition der Differenzierbarkeit aus Abschnitt 11.1 des Skriptes. Für den Differenzenquotienten gilt

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{1}{h} \cdot \frac{h^2}{h + \frac{\ln(1+h^2)}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{\ln(1+h^2)}{2h}}$$

für alle $h \neq 0$. Nach der Regel von l'Hospital aus (a) in Abschnitt 11.9 des Skriptes gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{\ln(1+h^2)}^{\xrightarrow{h\to 0} 0}}{\underbrace{2h}_{\xrightarrow{h\to 0} 0}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2h}{1+h^2}}{\underbrace{2}_{\neq 0}} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{1+h^2} = 0.$$

Also ist f differenzierbar in $x = 0$ und

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{1}{1 + \left(\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h^2)}{2h}\right)} = 1.$$

□

Aufgabe 57:

(i) Die Funktion f ist stetig und das Intervall $I := [-3, 2]$ ist beschränkt und abgeschlossen. Nach Satz aus Abschnitt 9.15 des Skriptes, nimmt f auf I Maximum und Minimum an. Seien etwa $x_m, x_M \in I$ mit

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \qquad \forall x \in I.$$

Sei $x_0 \in \{x_m, x_M\}$. Nach Definition aus Abschnitt 11.5 des Skriptes, ist x_0 ein lokales Extremum. Sei $\mathring{I} := (-3, 2)$. Es ist klar, dass f auf $\mathring{I}$ differenzierbar ist und

$$f'(x) = 4x^3 - 8x \quad \forall x \in \mathring{I}$$

gilt. Ist $x_0 \in \mathring{I}$, so gilt $f'(x_0) = 0$ nach Satz aus Abschnitt 11.6 des Skriptes. Die Nullstellen der Ableitung sind durch

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 4x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 2 \Leftrightarrow x \in \left\{0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$$

für alle $x \in \mathring{I}$ bestimmt. Durch Vergleich der Funktionswerte an den möglichen Extremalstellen

$$\begin{aligned}
f(-3) &= (-3)^4 - 4 \cdot (-3)^2 + 2 = 81 - 4 \cdot 9 + 2 = 47, \\
f\left(-\sqrt{2}\right) &= f\left(\sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^4 - 4 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 + 2 = 4 - 4 \cdot 2 + 2 = -2, \\
f(0) &= 2 \quad \text{und} \\
f(2) &= 2^4 - 4 \cdot 2^2 + 2 = 2
\end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}
x_m &\in \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}, \ f(x_m) = -2 = \min\left\{f(x) : \ x \in I\right\}, \\
x_M &= -3, \ f(x_M) = 47 = \max\left\{f(x) : \ x \in I\right\}.
\end{aligned}$$

(ii) Definiere $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} (x - a_k)^2$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Es ist klar, dass g differenzierbar ist und

$$g'(x) = \sum_{k=1}^{n} 2(x - a_k) = 2\left(\sum_{k=1}^{n} x - \sum_{m=1}^{n} a_m\right) = 2nx - 2\sum_{k=1}^{n} a_k = 2n\left(x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Insbesondere ist

$$g'(x) \begin{cases} > 0 & \text{für } x > b, \\ = 0 & \text{für } x = b \text{ und} \\ < 0 & \text{für } x < b, \end{cases}$$

wobei $b := \sum_{k=1}^{n} a_k$. Nach einer Folgerung aus dem Mittelwertsatz (siehe (3) im Abschnitt 11.8 des Skriptes), ist g auf $(-\infty, b]$ streng monoton fallend und auf $[b, \infty)$ streng monoton wachsend. Also ist das Messergebnis a die Stelle b des Minimums von g.

$\square$

Aufgabe 58:

(i) Die Funktion f ist stetig. Das Intervall $I := [0, 10]$ ist beschränkt und abgeschlossen. Nach Satz aus Abschnitt 9.15 des Skriptes, nimmt f auf I Maximum und Minimum an. Seien etwa $x_m, x_M \in I$ mit

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \qquad \forall x \in I.$$

Sei $x_0 \in \{x_m, x_M\}$. Nach Definition aus Abschnitt 11.5 des Skriptes, ist x_0 ein lokales Extremum. Seien $I_1 := (0, 3)$, $I_2 := (3, 10)$. Für alle $x \in I_1$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= -6x + (|x-3|+2)^2 \overset{x \leq 3}{=} -6x + (3-x+2)^2 = -6x + (5-x)^2 \\ &= -6x + x^2 - 10x + 25 = x^2 - 16x + 25. \end{aligned}$$

Für alle $x \in I_2$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= -6x + (|x-3|+2)^2 \overset{x \geq 3}{=} -6x + (x-3+2)^2 = -6x + (x-1)^2 \\ &= -6x + x^2 - 2x + 1 = x^2 - 8x + 1. \end{aligned}$$

Mit diesen Darstellungen ist klar, dass f auf I_1 bzw. I_2 differenzierbar ist und

$$f'(x) = 2x - 16 \quad \forall x \in I_1, \qquad \text{sowie} \qquad f'(x) = 2x - 8 \quad \forall x \in I_2.$$

Ist $x_0 \in I_1 \cup I_2$, so gilt $f'(x_0) = 0$ nach Satz aus Abschnitt 11.6 des Skriptes. Die Nullstellen der Ableitung werden wie folgt bestimmt. Für alle $x \in I_1$ gilt

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 16 = 0 \Leftrightarrow x = 8 \overset{8 \notin I_1}{\Leftrightarrow} \text{falsch.}$$

Für alle $x \in I_2$ gilt hingegen

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4.$$

Durch Vergleich der Funktionswerte an den möglichen Extremalstellen

$$\begin{aligned} f(0) &= -6 \cdot 0 + ((3-0)+2)^2 = 5^2 = 25, \\ f(3) &= -6 \cdot 3 + ((3-3)+2)^2 = -18 + 2^2 = -12, \\ f(4) &= -6 \cdot 4 + ((4-3)+2)^2 = -24 + 9 = -15 \quad \text{und} \\ f(10) &= -6 \cdot 10 + ((10-3)+2)^2 = -60 + 81 = 21 \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} x_m &= 4,\ f(x_m) = -15 = \min\{f(x) : x \in I\}, \\ x_M &= 0,\ f(x_M) = 25 = \max\{f(x) : x \in I\}. \end{aligned}$$

(ii) O.B.d.A. sei $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{2m+1}$. Für $j \in \{1, \ldots, 2m\}$ definiere die Intervalle $I_j := [a_j, a_{j+1}]$ und $\mathring{I}_j = (a_j, a_{j+1})$, sowie $I_0 := (-\infty, a_1]$, $\mathring{I}_0 = (-\infty, a_1)$, $I_{2m+1} := [a_{2m+1}, \infty)$ und $\mathring{I}_{2m+1} = (a_{2m+1}, \infty)$. Definiere ferner $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \sum_{k=1}^{2m+1} |x - a_k|$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Es ist klar, dass g stetig ist. Ferner gilt für jedes $j \in \{0, \ldots, 2m+1\}$ und jedes $x \in I_j$

$$g(x) = \sum_{k=1}^{2m+1} |x - a_k| = \sum_{k=1}^{j} |x - a_k| + \sum_{k=j+1}^{2m+1} |x - a_k| = \sum_{k=1}^{j} (x - a_k) + \sum_{k=j+1}^{2m+1} (a_k - x).$$

Folglich ist g auf jedem $\mathring{I}_j$ differenzierbar und es gilt

$$g'(x) = \sum_{k=1}^{j} 1 - \sum_{k=j+1}^{2m+1} 1 = j - ((2m+1) - (j+1) + 1) = 2j - (2m+1) \begin{cases} < 0 & \text{für } j \leq m \\ > 0 & \text{für } j > m \end{cases}$$

für alle $x \in \mathring{I}_j$. Nach einer Folgerung aus dem Mittelwertsatz (siehe (3) im Abschnitt 11.8 des Skriptes), ist g auf den Intervallen $I_0, \ldots, I_m$ streng monoton fallend und auf den Intervallen $I_{m+1}, \ldots, I_{2m+1}$ streng monoton wachsend. Also ist g auf

$$\bigcup_{j \in \{1, \ldots, m\}} I_j = (-\infty, a_{m+1}]$$

streng monoton fallend und auf

$$\bigcup_{j \in \{m+1, \ldots, 2m+1\}} I_j = [a_{m+1}, \infty)$$

streng monoton wachsend. Damit ist $a = a_{m+1}$ die gesuchte, einzige Stelle des Minimums von g.

□

Aufgabe 59:

(a) Nach der Regel von l'Hospital aus (b) im Abschnitt 11.9 der Vorlesung gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{\ln(x^2+3)}^{\xrightarrow{x\to\infty}\infty}}{\underbrace{\ln(x)}_{\xrightarrow{x\to\infty}\infty}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x^2+3}}{\underbrace{\frac{1}{x}}_{\neq 0 \text{ für } x\neq 0}} = 2 \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+3} = 2 \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{3}{x^2}} = 2.$$

(b) Nach der Regel von l'Hospital aus (a) im Abschnitt 11.9 der Vorlesung gilt

$$\lim_{x\to 1} \frac{\overbrace{1+\cos(\pi x)}^{\xrightarrow{x\to 1}0}}{\underbrace{x^2-2x+1}_{\xrightarrow{x\to 1}0}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{-\pi\sin(\pi x)}{\underbrace{2x-2}_{\neq 0 \text{ für } x\neq 0}} = -\pi \lim_{x\to 1} \frac{\overbrace{\sin(\pi x)}^{\xrightarrow{x\to 1}0}}{\underbrace{2x-2}_{\xrightarrow{x\to 1}0}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} -\pi^2 \lim_{x\to 1} \frac{\cos(\pi x)}{\underbrace{2}_{\neq 0}} = \frac{\pi^2}{2}.$$

(c) Sinus ist für jedes $x \geq 0$ auf $[\sqrt{x}, \sqrt{x+1}]$ stetig und auf $(\sqrt{x}, \sqrt{x+1})$ differenzierbar. Nach dem Mittelwertsatz aus Abschnitt 11.7 des Skriptes, existiert ein $\xi_x \in (\sqrt{x}, \sqrt{x+1})$ mit

$$\begin{aligned}
\sin(\sqrt{x}) - \sin(\sqrt{x+1}) &= -\left(\sin(\sqrt{x+1}) - \sin(\sqrt{x})\right) = -\cos(\xi_x)(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \\
&= -\cos(\xi_x)\left(\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right) = -\cos(\xi_x)\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right).
\end{aligned}$$

Folglich

$$\left|\sin(\sqrt{x}) - \sin(\sqrt{x+1})\right| = \underbrace{|-\cos(\xi_x)|}_{\leq 1}\left|\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{x\to\infty} 0,$$

also

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin(\sqrt{x}) - \sin(\sqrt{x+1})\right) = 0.$$

□

Aufgabe 60:

(a) Nach der Regel von l'Hospital aus (a) im Abschnitt 11.9 der Vorlesung gilt

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\overbrace{\sin(\sin(x))}^{\xrightarrow{x\to\pi} 0}}{\underbrace{x-\pi}_{\xrightarrow{x\to\pi} 0}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to\pi} \frac{\cos(\sin(x))\cos(x)}{\underbrace{1}_{\neq 0}} = -1.$$

(b) Nach der Regel von l'Hospital aus (a) im Abschnitt 11.9 der Vorlesung gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\ln(\cos(3x))}^{\xrightarrow{x\to 0} 0}}{\underbrace{\ln(\cos(2x))}_{\xrightarrow{x\to 0} 0}} &\overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-3\frac{\sin(3x)}{\cos(3x)}}{\underbrace{-2\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}}_{\neq 0 \text{ für } x \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}}} = \frac{3}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\tan(3x)}^{\xrightarrow{x\to 0} 0}}{\underbrace{\tan(2x)}_{\xrightarrow{x\to 0} 0}} \\
&\overset{\text{l'Hospital}}{=} \frac{3}{2}\lim_{x\to 0} \frac{3(1+\tan^2(3x))}{\underbrace{2(1+\tan^2(2x))}_{\neq 0}} = \frac{9}{4}.
\end{aligned}$$

(c) Logarithmus ist für jedes $x \geq 1$ auf $[x, 1+\sqrt{1+x^2}]$ stetig und auf $(x, 1+\sqrt{1+x^2})$ differenzierbar. Nach dem Mittelwertsatz aus Abschnitt 11.7 des Skriptes, existiert ein $\xi_x \in (x, 1+\sqrt{1+x^2})$ mit

$$\begin{aligned}
x\left(\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right) - \ln(x)\right) &= \frac{x}{\xi_x}\left(1+\sqrt{1+x^2} - x\right) = \frac{x}{\xi_x}\left(1+\sqrt{1+x^2} - \sqrt{x^2}\right) \\
&= \frac{x}{\xi_x}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{x^2}}\right).
\end{aligned}$$

Ferner ist

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}} = \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} \le \frac{x}{\xi_x} \le \frac{x}{x} = 1 \quad \text{wegen} \quad x < \xi_x < 1+\sqrt{1+x^2}$$

und damit ist $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\xi_x} = 1$ als Folgerung aus dem Einschnürungssatz. Deshalb ist

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x\left(\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right) - \ln(x)\right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\xi_x}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{x^2}}\right) \\
&= \left(\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\xi_x}\right) \cdot \left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{x^2}}\right)\right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

□