Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets Johanna Richter, M.Sc. Tobias Schmid, M.Sc.

WS2016/17
13.01.2017

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 11. Übungsblatt

Aufgabe 61:

(i) Die Menge der Nullstellen von f ist $N(f) = \{1\}$. Also ist $\frac{1}{f}$ auf $D = \mathbb{R} \setminus N(f)$ erklärt. Gesucht ist eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit positivem Konvergenzradius $r > 0$ und

$$\frac{1}{x^2 - 2x + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \forall x \in D : |x| < r.$$

Multiplizieren mit dem Nenner der linken Seite liefert die äquivalente Aussage

$$\begin{aligned}
1 &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}\right) - 2\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \\
&\overset{\text{Index-Shift}}{=} \left(\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n\right) - 2\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \\
&= \left(\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n\right) - 2\left(a_0 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n\right) + \left(a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n\right) \\
&= a_0 + (a_1 - 2a_0)x + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-2} - 2a_{n-1} + a_n) x^n \qquad \forall x \in D : |x| < r.
\end{aligned}$$

Beide Seiten dieser Gleichung sind eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius. Nach Satz 11.15 des Skriptes (Koeffizientenvergleich) gilt

$$a_0 = 1, \quad a_1 - 2a_0 = 0, \quad \forall n \geq 2 : a_{n-2} - 2a_{n-1} + a_n = 0$$

Die ersten fünf Koeffizienten sind

$$\begin{aligned}
&a_0 = 1, && a_2 = 2a_1 - a_0 = 4 - 1 = 3, && a_4 = 2a_3 - a_2 = 8 - 3 = 5. \\
&a_1 = 2a_0 = 2, && a_3 = 2a_2 - a_1 = 6 - 2 = 4,
\end{aligned}$$

Das legt die Vermutung $a_n = n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ nahe. Wir beweisen dies durch vollständige Induktion über n.

IA ($n = 0$): Klar.

IS ($n \rightsquigarrow n + 1$): Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Es gelte die *(IV)* $a_k = k + 1$ für alle $k \in \{0, \ldots, n\}$. Dann gilt für $n + 1$ das Folgende. Ist $n = 0$, so ist $a_{n+1} = a_1 = 2 = (n + 1) + 1$. Ist $n \geq 1$, so gilt

$$a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} \overset{\text{(IV)}}{=} 2(n + 1) - (n - 1 + 1) = n + 2 = (n + 1) + 1.$$

Dies schließt den Beweis der Vermutung ab.

Wir müssen noch sicherstellen, dass die gefundene Potenzreihe einen positiven Konvergenzradius hat. Nach der Formel von Cauchy-Hadamard gilt

$$r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1}} = 1 > 0.$$

Für alle $|x| < 1$ gilt also

$$\frac{1}{x^2 - 2x + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n.$$

(ii) Die Funktion g ist beliebig oft differenzierbar. Wir berechnen die ersten fünf Ableitungen. Für alle $x \in (-1, \infty)$ gilt

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln(1+x), & g^{(2)}(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2}, & g^{(4)}(x) &= -\frac{6}{(1+x)^4}, \\ g^{(1)}(x) &= \frac{1}{1+x}, & g^{(3)}(x) &= \frac{2}{(1+x)^3}, & g^{(5)}(x) &= \frac{24}{(1+x)^5}. \end{aligned}$$

Das Taylor-Polynom $T_4(g;0)$ ist laut Abschnitt 11.12 des Skriptes Vorlesung durch

$$T_4(g;0)(x) = \sum_{k=0}^{4} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k = \ln(1) + 1x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{6}x^3 - \frac{6}{24}x^4 = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

Sei $x \geq 0$. Nach dem Satz von Taylor aus dem Abschnitt 11.12 des Skriptes gibt es ein $\xi \in (0, x)$ mit

$$g(x) - T_4(g;0)(x) = \frac{g^{(5)}(\xi)}{5!} x^5 = \frac{x^5}{5} \frac{1}{(1+\xi)^5}.$$

Wegen $0 < \frac{1}{(1+\xi)^5} < 1$ folgt

$$0 \leq g(x) - T_4(g;0)(x) \leq \frac{1}{5}x^5.$$

□

Aufgabe 62:

(i) Die Menge der Nullstellen von f ist $N(f) = \{-3, 1\}$. Also ist $\frac{1}{f}$ auf $D = \mathbb{R} \setminus N(f)$ erklärt. Gesucht ist eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit positivem Konvergenzradius $r > 0$ und

$$\frac{1}{x^2 + 2x - 3} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n \qquad \forall x \in D : |x+1| < r.$$

Multiplizieren mit dem Nenner der linken Seite liefert die äquivalente Aussage

$$\begin{aligned}
1 &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^n\right)\left(x^2+2x-3\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^n\right)\left((x+1)^2-4\right) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^{n+2}\right) - 4\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^n\right) \\
&\overset{\text{Index-Shift}}{=} \left(\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}(x+1)^n\right) - 4\left(a_0 + a_1(x+1) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(x+1)^n\right) \\
&= -4a_0 - 4a_1(x+1) + \sum_{n=2}^{\infty}(a_{n-2}-4a_n)(x+1)^n \qquad \forall x \in D : |x+1| < r.
\end{aligned}$$

Beide Seiten dieser Gleichung sind eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius. Nach Satz 11.15 des Skriptes (Koeffizientenvergleich) gilt

$$-4a_0 = 1, \quad -4a_1 = 0, \quad \forall n \geq 2 : a_{n-2} - 4a_n = 0.$$

Damit ergibt sich induktiv

$$\begin{aligned}
a_0 &= -\frac{1}{4}, \qquad a_{2n} = \frac{1}{4}a_{2(n-1)} = \cdots = \left(\frac{1}{4}\right)^n a_0 = -\left(\frac{1}{4}\right)^n \frac{1}{4} = -\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}, \\
a_1 &= 0, \qquad a_{2n+1} = \frac{1}{4}a_{2(n-1)+1} = \cdots = \left(\frac{1}{4}\right)^n a_1 = 0.
\end{aligned}$$

Wir müssen noch sicherstellen, dass die gefundene Potenzreihe einen positiven Konvergenzradius hat. Nach der Formel von Cauchy-Hadamard gilt

$$r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{4}}} = 2 > 0.$$

Für alle $|x+1| < 2$ gilt also

$$\frac{1}{x^2+2x-3} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{n+1}}(x+1)^{2n}.$$

(ii) Die Funktion g ist beliebig oft differenzierbar. Wir berechnen die ersten drei Ableitungen. Für alle $x \in (-1, \infty)$ gilt

$$\begin{aligned}
g(x) &= e^{-x} + \frac{1}{1+x}, & g^{(2)}(x) &= e^{-x} + \frac{2}{(1+x)^3}, \\
g^{(1)}(x) &= -e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^2}, & g^{(3)}(x) &= -e^{-x} - \frac{6}{(1+x)^4}.
\end{aligned}$$

Das Taylor-Polynom $T_2\left(g; \frac{1}{2}\right)$ ist laut Abschnitt 11.12 des Skriptes Vorlesung durch

$$\begin{aligned}
T^2_{\frac{1}{2}} g(x) &= \sum_{k=0}^{2} \frac{g^{(k)}\left(\frac{1}{2}\right)}{k!}\left(x-\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \left(e^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{1+\frac{1}{2}}\right) - \left(e^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{e}} + \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{e}} + \frac{4}{9}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{e}} + \frac{16}{27}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

Sei $x \in [0,1]$. Nach dem Satz von Taylor aus dem Abschnitt 11.12 des Skriptes gibt es ein ξ zwischen x und $\frac{1}{2}$ mit

$$g(x) - T_2\left(g; \frac{1}{2}\right)(x) = \frac{g^{(3)}(\xi)}{3!}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3 = -\left(\frac{1}{6\sqrt{e}} + \frac{1}{(1+\xi)^4}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)^3.$$

Aus $0 < \xi$ folgt

$$\left|g^{(3)}(\xi)\right| = \left|-e^{-\xi} - \frac{6}{(1+\xi)^4}\right| = e^{-\xi} + \frac{6}{(1+\xi)^4} \overset{\text{Monotonie}}{\leq} e^{-0} + \frac{6}{(1+0)^4} = 7.$$

Somit gilt mit $C := \frac{7}{6}$ wie gefordert

$$\left|g(x) - T_2\left(g; \frac{1}{2}\right|\right)(x) \leq C\left|x-\frac{1}{2}\right|^3$$

für alle $x \in [0,1]$.

□

Aufgabe 63:

(i) Es gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{n^{p+1}}\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,|I_k| = \sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}),$$

wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^p$,

$$Z_n = \left\{x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}, \ldots, x_n = \frac{n}{n} = 1\right\}, \qquad \xi^{(n)} = (\xi_1, \ldots, \xi_n) = (x_1, \ldots, x_n).$$

Die Feinheit der äquidistanten Zerlegung Z_n des Intervalls $[0,1]$ ist $\|Z_n\| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Da $f \in R([a,b])$ nach Satz 12.5 des Skriptes, gilt $\sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}) \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ nach Satz 12.7 des Skriptes. Eine Stammfunktion von f ist durch $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x^{p+1}}{p+1}$ gegeben. Nach dem Hauptsatz (1) aus Abschnitt 12.10 des Skriptes gilt

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_{x=0}^1 = \frac{1}{p+1}.$$

(ii) Es gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{n}{k} \overset{\text{Index-}}{\underset{\text{shift}}{=}} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k+n-1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k-1}{n}} = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,|I_k| = \sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}),$$

wobei $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{1+x}$,

$$Z_n = \left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, \dots, x_{n-1} = \frac{n-1}{n}, x_n = \frac{n}{n} = 1 \right\}, \qquad \xi^{(n)} = (x_0, \dots, x_{n-1}).$$

Die Feinheit der äquidistanten Zerlegung Z_n des Intervalls $[0,1]$ ist $\|Z_n\| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Da $f \in R([a,b])$ nach Satz 12.5 des Skriptes, gilt $\sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}) \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ nach Satz 12.7 des Skriptes. Eine Stammfunktion von f ist durch $F : (-1,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(1+x)$ gegeben. Nach dem Hauptsatz (1) aus Abschnitt 12.10 des Skriptes gilt

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_{x=0}^1 = \ln(2).$$

$\square$

Aufgabe 64:

(i) Es gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,|I_k| = \sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}),$$

wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$,

$$Z_n = \left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}, \dots, x_n = \frac{n}{n} = 1 \right\}, \qquad \xi^{(n)} = (\xi_1, \dots, \xi_n) = (x_1, \dots, x_n).$$

Die Feinheit der äquidistanten Zerlegung Z_n des Intervalls $[0,1]$ ist $\|Z_n\| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Da $f \in R([a,b])$ nach Satz 12.5 des Skriptes, gilt $\sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}) \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ nach Satz 12.7 des Skriptes. Eine Stammfunktion von f ist durch $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ gegeben. Nach dem Hauptsatz (1) aus Abschnitt 12.10 des Skriptes gilt

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_{x=0}^1 = \frac{2}{\pi}.$$

(ii) Es gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \prod_{k=1}^{n} (k+n)^{\frac{1}{n}} &= \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{k+n}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right)\right) \\
&= \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right)\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right) \\
&= \exp\left(\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,|I_k|\right) = \exp\left(\sigma_f(Z_n, \xi^{(n)})\right),
\end{aligned}$$

wobei $f : (-1,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(1+x)$,

$$Z_n = \left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, \dots, x_{n-1} = \frac{n-1}{n}, x_n = \frac{n}{n} = 1 \right\}, \qquad \xi^{(n)} = (x_1, \dots, x_n)\,.$$

Die Feinheit der äquidistanten Zerlegung Z_n des Intervalls $[0,1]$ ist $\|Z_n\| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Da $f \in R([a,b])$ nach Satz 12.5 des Skriptes, gilt $\sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}) \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ nach Satz 12.7 des Skriptes. Da die Exponentialfunktion stetig ist, gilt $\exp\left((\sigma_f(Z_n,\xi^{(n)})\right) \xrightarrow{n\to\infty} \exp\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)$. Eine Stammfunktion von f ist durch

$$F : (-1,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto (x+1)\ln(x+1) - x$$

gegeben (vgl. Beispiel (2) im Abschnitt 12.12 des Skriptes). Nach dem Hauptsatz (1) aus Abschnitt 12.10 des Skriptes gilt

$$\exp\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right) = \exp\left([F(x)]_{x=0}^1\right) = \exp\left(2\ln(2) - 1\right) = \frac{\left(e^{\ln(2)}\right)^2}{e} = \frac{4}{e}.$$

□

Aufgabe 65:

Wir halten zunächst fest, dass jeder Integrand auf dem jeweiligen Integrationsintervall stetig ist und deshalb auch integrierbar nach Satz aus Abschnitt 12.5 des Skriptes.

(i) Es gilt

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} |t-1|\,\mathrm{d}t &= \int_{-2}^{1} |t-1|\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{2} |t-1|\,\mathrm{d}t = \int_{-2}^{1} (1-t)\mathrm{d}t + \int_{1}^{2} (t-1)\mathrm{d}t \\ &= \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_{t=-2}^{t=1} + \left[\frac{t^2}{2} - t\right]_{t=1}^{t=2} = 5.\end{aligned}$$

(ii) Es gilt nach der Substitutionsregel aus dem Abschnitt 12.13 des Skriptes

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})}\mathrm{d}t &= \int_1^4 \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{t}}}_{=g'(t)} \underbrace{\frac{2}{1+\underbrace{\sqrt{t}}_{=g(t)}}}_{=f(g(t))}\,\mathrm{d}t = \int_{g(1)}^{g(4)} f(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{2}{1+x}\mathrm{d}x \\ &= 2\left[\ln(1+x)\right]_{x=1}^2 = 2\left(\ln(3) - \ln(2)\right) = 2\ln\left(\frac{3}{2}\right).\end{aligned}$$

(iii) Es gilt nach der Regel der partiellen Integration aus Abschnitt 12.12 des Skriptes

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\frac{1}{2}t^2}_{=g(t)} \underbrace{\sin(2t)}_{=f'(t)}\,\mathrm{d}t &\overset{\text{P.I.}}{=} -\left[\frac{1}{2}\cos(2t)\cdot\frac{1}{2}t^2\right]_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos(2t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos(2t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Das verbliebene Integral wird wieder partiell integriert zu

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{t}_{=g(t)} \underbrace{\cos(2t)}_{=f'(t)} \,\mathrm{d}t \overset{\text{P.I.}}{=} \left[t \cdot \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\left[\cos(2t)\right]_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}.$$

Insgesamt also

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}t^2 \sin(2t)\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}.$$

(iv) Es gilt nach der Substitutionsregel aus dem Abschnitt 12.13 des Skriptes

$$\begin{aligned}\int_1^4 \arctan\left(\sqrt{\sqrt{t}-1}\right) \mathrm{d}t &\underset{\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=2s}{\overset{t=s^2}{=}} \int_1^2 2s\arctan\left(\sqrt{s-1}\right) \mathrm{d}s \\ &\underset{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}=2x}{\overset{s=x^2+1}{=}} 4\int_0^1 (x^2+1)x\arctan(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Weiter gilt nach der Regel der partiellen Integration aus Abschnitt 12.12 des Skriptes

$$\begin{aligned}\int_0^1 \underbrace{4(x^2+1)x}_{f'(x)} \underbrace{\arctan(x)\mathrm{d}x}_{g(x)} &= \left[(x^4+2x^2)\arctan(x)\right]_{x=0}^1 - \int_0^1 \frac{x^4+2x^2}{1+x^2}\mathrm{dx} \\ &= \frac{3}{4}\pi - \int_0^1 \frac{(1+x^2)^2-1}{1+x^2}\mathrm{dx} \\ &= \frac{3}{4}\pi + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{dx} - \int_0^1 1+x^2\mathrm{dx} \\ &= \frac{3}{4}\pi + \left[\arctan(x)\right]_{x=0}^{x=1} - \left[x+\frac{1}{3}x^3\right]_{x=0}^{x=1} = \pi - \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 66:
Wir halten zunächst fest, dass jeder Integrand auf dem jeweiligen Integrationsintervall stetig ist und deshalb auch integrierbar nach Satz aus Abschnitt 12.5 des Skriptes.

(i) Die Nullstellenmenge des Sinuses ist $\pi\mathbb{Z}$ (siehe Abschnitt 10.2 des Skriptes). Also hat der Sinus für jedes $k \in \mathbb{Z}$ auf $[(k-1), k]$ keinen Vorzeichenwechsel (Zwischenwertsatz aus Abschnitt 9.9 des Skriptes). Folglich gilt

$$\begin{aligned}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin(t)|\,\mathrm{d}t &= \left|\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sin(t)\mathrm{d}t\right| = \left|-\left[\cos(t)\right]_{t=(k-1)\pi}^{t=k\pi}\right| \\ &= \left|(-1)^k - (-1)^{(k-1)}\right| = \left|(-1)^k + (-1)^k\right| = 2.\end{aligned}$$

(ii) Es gilt nach der Substitutionsregel aus dem Abschnitt 12.13 des Skriptes

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{1}{t(1+\ln(t))}\mathrm{d}t &= \int_1^e \underbrace{\frac{1}{t}}_{=g'(t)} \underbrace{\frac{1}{1+\underbrace{\ln(t)}_{g(t)}}}_{=f(g(t))}\,\mathrm{d}t = \int_{g(1)}^{g(e)} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = [\ln(1+x)]_{x=0}^1 = \ln(2).\end{aligned}$$

(iii) Es gilt nach der Regel der partiellen Integration aus Abschnitt 12.12 des Skriptes

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \arcsin(t)\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \underbrace{1}_{=f'(t)}\underbrace{\arcsin(t)}_{=g(t)}\,\mathrm{d}t = [t\arcsin(t)]_{t=0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t\cdot\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Weiter gilt nach der Substitutionsregel aus Abschnitt 12.13 des Skriptes

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \underbrace{2t}_{=g'(t)} \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{1-\overbrace{t^2}^{=g(t)}}}}_{=f(g(t))}\,\mathrm{d}t = \int_{g(0)}^{g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x \\ &= -\left[\sqrt{1-x}\right]_{x=0}^{\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Insgesamt also

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \arcsin(t)\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{4} + \left[\sqrt{1-t^2}\right]_{t=0}^{t=\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1.$$

(iv) Nach Aufgabe 40 (i) gilt

$$\sin(t) = \frac{2\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}$$

für alle $t\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]\subseteq\mathbb{R}\setminus\pi(2\mathbb{Z}+1)$. Folglich ist

$$\frac{1}{\sin(t)} = \frac{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}{2\tan\left(\frac{t}{2}\right)} \qquad \forall t\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right].$$

Es gilt nach der Substitutionsregel aus dem Abschnitt 12.13 des Skriptes (für Werte des Tangens siehe Aufgabe 50)

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{\sin(t)}\mathrm{d}t &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}{2\tan\left(\frac{t}{2}\right)}\mathrm{d}t \underset{\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=\frac{2}{1+s^2}}{\overset{t=2\arctan(s)}{=}} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1+s^2}{2s}\cdot\frac{2}{1+s^2}\mathrm{d}s \\ &= \int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{s}\mathrm{d}s = [\ln(s)]_{s=1}^{s=\sqrt{3}} = \frac{\ln(3)}{2}.\end{aligned}$$

□

http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm1phys2016w/