Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets   Johanna Richter, M.Sc.   Tobias Schmid, M.Sc.

WS2016/17
20.01.2017

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 12. Übungsblatt

Aufgabe 67:
Wir halten zunächst fest, dass jeder Integrand auf dem jeweiligen Integrationsintervall stetig ist und deshalb auch integrierbar nach Satz aus Abschnitt 12.5 des Skriptes.

(i) Substitutionsregel liefert

$$\int_0^1 (1+2t)^3 \mathrm{d}t \underset{\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{2}}{\overset{t=\frac{s-1}{2}}{=}} \frac{1}{2}\int_1^3 s^3 \mathrm{d}s = \frac{1}{8}\left[s^4\right]_{s=1}^3 = \frac{81-1}{8} = 10.$$

(ii) Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}\int_1^e \underbrace{t}_{=f'(t)} \underbrace{\log(t)}_{=g(t)} \mathrm{d}t &= \left[\frac{t^2}{2}\log(t)\right]_{t=1}^{t=e} - \int_1^e \frac{t^2}{2}\frac{1}{t}\mathrm{d}t = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\int_1^e t\mathrm{d}t = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}\left[t^2\right]_{t=1}^e \\ &= \frac{e^2+1}{4}.\end{aligned}$$

(iii) Die Technik des „Scharfen Hinsehens“™zusammen mit der Substitutionsregel liefert

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{t^3}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_1^2 \underbrace{\frac{\overbrace{t^2}^{=g(t)}}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}}_{=f(g(t))} \underbrace{2t}_{=g'(t)} \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{x}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{1+x}{(1+x)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x \\ &\underset{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1}{\overset{y=1+x}{=}} \frac{1}{2}\int_2^5 y^{-\frac{1}{2}} - y^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}y = \left[\sqrt{y}\right]_{y=2}^5 + \left[\frac{1}{\sqrt{y}}\right]_{y=2}^5 \\ &= \sqrt{5} - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{5}}{5} - \frac{3\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

(iv) Für den Integranden gilt per Definition

$$\frac{1}{\sinh(t)\cosh(t)} = \frac{4}{(e^t-e^{-t})(e^t+e^{-t})} = \frac{4}{e^{2t}-e^{-2t}} \qquad \forall t > 0.$$

Daher bietet es sich an, die Substitutionsregel zu verwenden. Man erhält

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\log(3)}{2}}^{\frac{\log(7)}{2}} \frac{1}{\sinh(t)\cosh(t)}\mathrm{d}t &= \int_{\frac{\log(3)}{2}}^{\frac{\log(7)}{2}} \frac{4}{e^{2t}-e^{-2t}}\mathrm{d}t \overset{t=\frac{\ln(s)}{2}}{\underset{\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{2s}}{=}} 2\int_3^7 \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s-\frac{1}{s}}\mathrm{d}s = 2\int_3^7 \frac{1}{s^2-1}\mathrm{d}s \\
&= \int_3^7 \frac{2}{(s-1)(s+1)}\mathrm{d}s = \int_3^7 \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\mathrm{d}s \\
&= [\log(s-1)-\log(s+1)]_{s=3}^{s=7} = \left[\log\left(\frac{s-1}{s+1}\right)\right]_{s=3}^{s=7} \\
&= \log\left(\frac{3}{4}\right) - \log\left(\frac{1}{2}\right) = \log\left(\frac{3}{2}\right).
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 68:
Wir halten zunächst fest, dass jeder Integrand auf dem jeweiligen Integrationsintervall stetig ist und deshalb auch integrierbar nach Satz aus Abschnitt 12.5 des Skriptes.

(i) Die Technik des „Scharfen Hinsehens“™zusammen mit der Substitutionsregel liefert

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{9-4t^2}}\mathrm{d}t = -\frac{1}{8}\int_0^1 \frac{(-8t)}{\sqrt{9-4t^2}}\mathrm{d}t = -\left[\frac{\sqrt{9-4t^2}}{4}\right]_{t=0}^{1} = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{4}.$$

(ii) Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \underbrace{t}_{=g(t)} \cdot \underbrace{\cos(t)}_{=f'(t)}\,\mathrm{d}t &\overset{\text{P.I.}}{=} [t\sin(t)]_{t=0}^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + [\cos(t)]_{t=0}^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{\sqrt{2}\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{2}(\pi+4)-8}{8}.
\end{aligned}$$

(iii) Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(t-1)+1}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t = -\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-t}\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{3}\left[(1-t)^{\frac{3}{2}}\right]_{t=0}^{\frac{1}{2}} - 2\left[\sqrt{1-t}\right]_{t=0}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{2}{3} + 2 - \sqrt{2} = \frac{8-5\sqrt{2}}{6}.
\end{aligned}$$

(iv) Substitutionsregel liefert

$$\int_{-\frac{\log(3)}{2}}^{\frac{\log(3)}{2}} \frac{e^t+3}{e^{2t}+1}\mathrm{d}t \overset{t=\ln(s)}{\underset{\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{s}}{=}} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{s+3}{s^2+1}\cdot\frac{1}{s}\mathrm{d}s = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+s^2}\mathrm{d}s + 3\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{s(s^2+1)}\mathrm{d}s.$$

Das erste Integral ist

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+s^2}\mathrm{d}s = [\arctan(s)]_{s=\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}.$$

Für das zweite Integral beobachtet man (Partialbruchzerlegung)

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} \qquad \forall s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

und folglich

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{s(s^2+1)} \mathrm{d}s &= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{s} \mathrm{d}s - \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{2s}{1+s^2} \mathrm{d}s = [\ln(s)]_{s=\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \left[\ln(1+s^2)\right]_{s=\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \\
&= \ln(3) - \frac{1}{2}\left(2\ln(2) - 2\ln(2) + \ln(3)\right) = \frac{\ln(3)}{2}.
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt $\int_{-\frac{\log(3)}{2}}^{\frac{\log(3)}{2}} \frac{e^t+3}{e^{2t}+1} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{6} + \frac{3}{2}\ln(3)$.

□

Aufgabe 69:

Bei der DGL handelt es sich um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen (siehe Abschnitt 13.4 des Skriptes). Betrachte zunächst den Fall $|u_0| < 1$ und löse formal

$$\begin{aligned}
u' &= t\sqrt{1-u^2} \\
\Rightarrow \int_0^t \frac{u'(s)}{\sqrt{1-u^2(s)}} \mathrm{d}s = \int_{u_0}^{u(t)} \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}} \mathrm{d}\eta &= \int_0^t s \mathrm{d}s \\
\Rightarrow [\arcsin(\eta)]_{\eta=u_0}^{u(t)} &= \frac{t^2}{2} \\
\Rightarrow u(t) &= \sin\left(\frac{t^2}{2} + \arcsin(u_0)\right).
\end{aligned}$$

Diese Lösungsformel kann nicht für alle $t \in \mathbb{R}$ gültig sein, denn wegen der DGL muss u monoton wachsend für $t \geq 0$ und monoton fallend für $t \leq 0$ sein. Tatsächlich gilt sie auf dem größten Intervall I, welches die Startstelle 0 enthält und auf dem $\sqrt{1-u^2}$ nicht verschwindet (vgl. Abschnitt 13.4 des Skriptes), also

$$I = (-a, a), \quad \text{wobei} \quad a = \sqrt{\pi - 2\arcsin(u_0)}.$$

Wegen der erwähnten Monotonie, ist

$$u(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{t^2}{2} + \arcsin(u_0)\right), & \text{falls } |t| < a, \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

der einzige Kandidat für eine maximale Lösung des AWPs. Tatsächlich ist die Fortsetzung in a stetig und wegen

$$\lim_{t \to a-} u'(t) = \lim_{t \to a-} 2t\cos\left(\frac{t^2}{2} + \arcsin(u_0)\right) = 2a\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} = 0 = \lim_{t \to a+} u'(t)$$

differenzierbar. Wegen Symmetrie gilt das auch für $-a$. Schließlich ist die DGL auf ganz $\mathbb{R}$ erfüllt.

Falls $u_0 = 1$, ist $u : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $t \mapsto 1$ die eindeutige, maximale Lösung des AWPs: Natürlich ist u eine maximale Lösung. Angenommen, es gäbe eine weitere Lösung $\tilde{u} : I \to [-1, 1]$. Wegen der bereits erwähnten Monotonie, nimmt $\tilde{u}$ in $t = 0$ sein globales Minimum $u_0 = 1$ an. Also gilt tatsächlich $\tilde{u} = u|_I \equiv 1$.

Falls $u_0 = -1$, ist $u \equiv -1$ eine maximale Lösung. Falls eine Lösung von dieser Konstanten (nach oben) abweicht, kann man ihre Gestalt wieder mit der Trennung der Veränderlichen berechnen (vgl. den Fall $|u_0| < 1$). Also hat jede Lösung die Gestalt

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \leq -\sqrt{2\pi + t_1^2}, \\ \sin\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t_1^2}{2} - \frac{\pi}{2}\right) & \text{für } -\sqrt{2\pi + t_1^2} < t \leq -t_1, \\ -1 & \text{für } -t_1 < t \leq t_2, \\ \sin\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t_2^2}{2} - \frac{\pi}{2}\right) & \text{für } t_2 < t \leq \sqrt{2\pi + t_2^2}, \\ 1 & \text{für } \sqrt{2\pi + t_2^2} \leq t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

mit beliebigen Konstanten $t_1, t_2 \in [0, \infty]$. □

Aufgabe 70:

(i) Wir beobachten, dass für jedes $x \in [0, 1]$ und jedes $n \in \mathbb{N}$

$$|f_n(x)| = \frac{1}{n^2} \left| \frac{2n^3x^2}{(1 + n^3x^2)^2} \right| = \frac{1}{n^2} \left| g(n^3x^2) \right| \leq \frac{1}{n^2} \|g\|_\infty ,$$

wobei $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \frac{2y}{(1+y)^2}$. Wegen

$$\left| \frac{2y}{(1 + y)^2} \right| = 1 - \frac{y^2 + 1}{(1 + y)^2} \leq 1 \qquad \forall y \in [0, \infty),$$

ist $\|g\|_\infty \leq 1$. Also ist $f_n \rightrightarrows 0$ auf $[0, 1]$ für $n \to \infty$. Nach Satz im Abschnitt 12.15 des Skriptes gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = 0.$$

(ii) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{1 + nx}\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left[\ln(1 + nx)\right]_{x=0}^1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\ln(1 + n)}^{\to\infty}}{\underbrace{n}_{\to\infty}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{1+n}}{\underbrace{1}_{\neq 0}} = 0.$$

□

Aufgabe 71:

(i) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine Differentialgleichung mit getrennten

Veränderlichen. Löse formal (vgl. Abschnitt 13.4 des Skriptes)

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= e^{y}\sin(x) \\ \rightsquigarrow e^{-y}\mathrm{d}y &= \sin(x)\mathrm{d}x \\ \rightsquigarrow \int_{-\ln(3)}^{y(x)} e^{-\eta}\mathrm{d}\eta &= \int_0^x \sin(\xi)\mathrm{d}\xi \\ \Rightarrow -\left[e^{-\eta}\right]_{\eta=-\ln(3)}^{y(x)} &= -\left[\cos(\xi)\right]_{\xi=0}^{x} \\ \Leftrightarrow y(x) &= -\ln(2+\cos(x)). \end{aligned}$$

Also ist $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -\ln(2+\cos(x))$ die maximale Lösung des AWPs.

(ii) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung (siehe Abschnitt 13.3 des Skriptes). Berechne

$$A(x) = \int_0^x 2t\mathrm{d}t = x^2,$$

sowie

$$\int_0^x e^{-A(s)}s\mathrm{d}s = \left[-\frac{1}{2}e^{-s^2}\right]_{s=0}^{x} = \frac{1}{2}\left(1-e^{-t^2}\right).$$

Nach der Variation-der-Konstanten-Formel ist

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + e^{x^2}\int_0^t e^{-s^2}s\mathrm{d}s = e^{x^2} - \frac{1}{2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems.

□

Aufgabe 72:

(i) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. Löse formal (vgl. Abschnitt 13.4 des Skriptes)

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= xe^{-x}y^2 \\ \rightsquigarrow \frac{1}{y^2}\mathrm{d}y &= xe^{-x}\mathrm{d}x \\ \rightsquigarrow \int_1^{y(x)} \frac{1}{\eta^2}\mathrm{d}\eta &= \int_0^x \xi e^{-\xi}\mathrm{d}\xi \\ \Rightarrow -\left[\frac{1}{\eta}\right]_{\eta=1}^{y(x)} &= -\left[\xi e^{-\xi}\right]_{\xi=0}^{x} + \int_0^x e^{-\xi}\mathrm{d}\xi = -\left[\xi e^{-\xi}\right]_{\xi=0}^{x} - \left[e^{-\xi}\right]_{\xi=0}^{x} \\ \Leftrightarrow y(x) &= \frac{e^x}{1+x}. \end{aligned}$$

Dabei ist $x \in I = (-1,\infty)$ — das größte Intervall mit $0 \in I$ und $y(x) \neq 0$ für alle $x \in I$.

Dieses y ist die maximale Lösung, denn y lässt sich wegen $\lim_{x\to -1+} y(x) = \infty$ nicht stetig nach links fortsetzen.

(ii) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine lineare homogene Differentialgleichung erster Ordnung (siehe Abschnitt 13.3 des Skriptes). Berechne

$$A(x) := \int_0^x s + \frac{2}{1+s^2} \mathrm{ds} = \left[\frac{1}{2}s^2 + 2\arctan(s)\right]_{s=0}^{x} = \frac{x^2}{2} + 2\arctan(x).$$

Nach der Variation-der-Konstanten-Formel ist

$$y(x) = e^{\frac{x^2}{2}+2\arctan(x)}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems.

□