Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets   Johanna Richter, M.Sc.   Tobias Schmid, M.Sc.

WS2016/17
03.02.2017

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 14. Übungsblatt

Aufgabe 79:

(i) Das Integral ist uneigentlich bei 0 (Integrand unbeschränkt) und bei ∞. Nach der Definition aus Abschnitt 14.1, ist das gegebene Integral konvergent, falls $\int_0^1 \frac{1+\sin(x)}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$ und $\int_1^\infty \frac{1+\sin(x)}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$ konvergent sind.

Es gilt

$$\begin{aligned} \left|\frac{1+\sin(x)}{\sqrt{x}(1+x)}\right| &\leq \frac{2}{\sqrt{x}(1+x)} \leq \frac{2}{\sqrt{x}} \qquad \forall x \in (0,1] \quad \text{und} \\ \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{x}} &= 2 \lim_{a\to 0+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 4 \lim_{a\to 0+} \left[\sqrt{x}\right]_{x=a}^1 = 4. \end{aligned}$$

Folglich ist $\int_0^1 \frac{1+\sin(x)}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$ (absolut) konvergent nach dem Majorantenkriterium.

Ferner gilt

$$\begin{aligned} \left|\frac{1+\sin(x)}{\sqrt{x}(1+x)}\right| &\leq \frac{2}{\sqrt{x}(1+x)} \leq \frac{2}{x^{\frac{3}{2}}} = 2x^{-\frac{3}{2}} \qquad \forall x \in [1,\infty) \quad \text{und} \\ \int_1^\infty 2x^{-\frac{3}{2}} &= 2 \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x = -4 \lim_{b\to\infty} \left[x^{-\frac{1}{2}}\right]_{x=1}^b = 4. \end{aligned}$$

Folglich ist $\int_1^\infty \frac{1+\sin(x)}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$ ebenfalls (absolut) konvergent nach dem Majorantenkriterium.

Damit ist $\int_0^\infty \frac{1+\sin(x)}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$ (absolut) konvergent.

(ii) Das Integral ist uneigentlich bei 0. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{e^x}{x} &\geq \frac{e^0}{x} = \frac{1}{x} \qquad \forall x \in (0,1] \quad \text{und} \\ \int_0^1 \frac{1}{x} &= \lim_{a\to 0+} \int_a^1 \frac{1}{x} = \lim_{a\to 0+} [\ln(x)]_{x=a}^1 = -\lim_{a\to 0+} \ln(a) = \infty. \end{aligned}$$

Folglich ist $\int_0^1 \frac{e^x}{x}\mathrm{d}x$ divergent nach dem Minorantenkriterium.

□

Aufgabe 80:

(i) Das Integral ist uneigentlich bei ∞. Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{\sqrt{x}}^{\to\infty}}{\underbrace{e^{\frac{x}{2}}}_{\to\infty}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\underbrace{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}}_{\neq 0}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}e^{\frac{x}{2}}} = 0.$$

Deshalb existiert ein $M > 0$ so, dass $\sqrt{x}e^{-\frac{x}{2}} \leq M$ für alle $x > 0$ ausfällt (vgl. Aufgabe 47). Ferner gilt

$$\begin{aligned}
\left|\sqrt{x}e^{-x}\right| &= e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{x}e^{-\frac{x}{2}} \leq Me^{-\frac{x}{2}} \qquad \forall x \in (0,\infty) \quad \text{und} \\
\int_0^\infty Me^{-\frac{x}{2}}\mathrm{d}x &= M\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-\frac{x}{2}}\mathrm{d}x = -\frac{M}{2}\lim_{b\to\infty}\left[e^{-\frac{x}{2}}\right]_{x=0}^b = \frac{M}{2}\left(1 - \lim_{b\to\infty} e^{-\frac{b}{2}}\right) \\
&= \frac{M}{2} < \infty.
\end{aligned}$$

Folglich ist $\int_0^\infty \sqrt{x}e^{-x}\mathrm{d}x$ (absolut) konvergent nach dem Majorantenkriterium.

(ii) Das Integral ist uneigentlich bei 0. Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{e^x - 1}{x^2} &= \frac{1}{x^2}\left(\sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k!} - 1\right) = \frac{1}{x^2}\sum_{k=1}^\infty \frac{x^k}{k!} \overset{\text{Index-}}{\underset{\text{shift}}{=}} \frac{1}{x^2}\sum_{k=0}^\infty \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{1}{x}\sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{(k+1)!} \\
&= \frac{1}{x}\left(1 + \sum_{k=1}^\infty \underbrace{\frac{x^k}{(k+1)!}}_{\geq 0}\right) \geq \frac{1}{x} \qquad \forall x \in (0,1] \quad \text{und} \\
\int_0^1 \frac{1}{x} &= \lim_{a\to 0+}\int_a^1 \frac{1}{x} = \lim_{a\to 0+} [\ln(x)]_{x=a}^1 = -\lim_{a\to 0+} \ln(a) = \infty.
\end{aligned}$$

Folglich ist $\int_0^1 \frac{e^x-1}{x^2}\mathrm{d}x$ divergent nach dem Minorantenkriterium.

$\square$

Aufgabe 81:

Forme A durch Zeilenumformungen wie folgt um

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -6 & 6 & 9 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} |\cdot -\frac{1}{2} \\ |\cdot -\frac{1}{2} \\ |\cdot -\frac{1}{3} \end{array} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Die letzte Matrix ist in Zeilennormalform. Da sie keine Nullzeilen enthält, sind die Zeilen von A linear unabhängig (siehe Folgerung aus dem Satz aus Abschnitt 15.7 des Skriptes). □

Aufgabe 82:
Forme A durch Zeilenumformungen wie folgt um

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & 2 \\ 0 & 8 & -4 & 8 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 10 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -16 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -16 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mid \cdot \frac{1}{2} \\ \mid \cdot \frac{1}{4} \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 10 & \beta - 4 \end{pmatrix}.$$

Die letzte Matrix ist für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in Zeilenstufenform. Sie enthält genau für $\alpha \neq 10$ oder $\beta \neq 4$ keine Nullzeilen und genau in diesem Fall sind Zeilen von A linear unabhängig (siehe Folgerung aus dem Satz aus Abschnitt 15.7 des Skriptes).

Sind $\alpha = 10$ und $\beta = 4$, so ist die letzte Matrix bereits die Zeilennormalform von A.

Ist $\alpha = 10$ und $\beta \neq 4$, so ist

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta - 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \cdot \frac{1}{\beta-4} \quad \cdot \frac{-3}{\beta-4} \quad \mid \cdot \frac{1}{\beta-4} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Zeilennormalform von A.

Für $\alpha \neq 10$ definiere $\kappa := \frac{\beta-4}{\alpha-10}$. Dann ist

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 10 & \beta - 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \mid \cdot \frac{1}{\alpha-10} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \kappa \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 - 6\kappa \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \kappa \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 + 4\kappa \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \kappa \end{pmatrix}$$

die Zeilennormalform von A. □

Aufgabe 83:
Bringe zunächst die erweiterte Matrix $(A|\vec{b})$ durch Zeilenumformungen auf Zeilennormalform

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 3 \\ \beta & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 3 \\ 0 & 2 - \alpha\beta & 4 - 3\beta \end{pmatrix}.$$

- $\alpha\beta \neq 2$: In diesem Fall ist (siehe Abschnitt 15.12 des Skriptes) $\dim \operatorname{Bild}(A) = \operatorname{Rang}(A) = 2$. Also ist $\operatorname{Bild}(A) = \mathbb{R}^2$. Nach der Dimensionsformel (siehe Abschnitt 15.13 des Skriptes ist $2 = \operatorname{Rang}(A) + \dim \operatorname{Kern}(A)$. Also ist $\dim \operatorname{Kern}(A) = 0$ und $\operatorname{Kern}(A) = \left\{\vec{0}\right\}$.

  Nach Abschnitt 15.11 des Skriptes ist das lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar. Die Lösung $\vec{x}$ erhält man in diesem Fall durch

  $$(A|\vec{b}) \sim \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 3 \\ 0 & 2-\alpha\beta & 4-3\beta \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mid \cdot \frac{1}{2-\alpha\beta} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 3 \\ 0 & 1 & \frac{4-3\beta}{2-\alpha\beta} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow + \\ \cdot(-\alpha) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{6-4\alpha}{2-\alpha\beta} \\ 0 & 1 & \frac{4-3\beta}{2-\alpha\beta} \end{pmatrix},$$

  also $\vec{x} = \frac{1}{2-\alpha\beta}\begin{pmatrix} 6-4\alpha \\ 4-3\beta \end{pmatrix}$.

- $\alpha\beta = 2$: In diesem Fall ist $\dim \operatorname{Bild}(A) = \operatorname{Rang}(A) = 1$ (siehe Abschnitt 15.12 des Skriptes). Da $\operatorname{Bild}(A)$ der lineare Spann der Spalten von A ist (siehe (2) im Abschnitt 15.10 des Skriptes), muss

  $$\operatorname{Bild}(A) = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix}\right\} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

  gelten. Den Kern von A kann man mit dem (-1)-Ergänzungstrick (siehe Abschnitt 15.11 des Skriptes) aus der Zeilennormalform von A ablesen und erhält

  $$\operatorname{Kern}(A) = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

  Das lineare Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn

  $$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \operatorname{Bild}(A) = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix}\right\} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \end{pmatrix}\right\}.$$

  Dies ist genau für $\alpha = \frac{3}{2}$ bzw. $\beta = \frac{4}{3}$ der Fall. Dann kann eine partikuläre Lösung $\vec{x}_0$ aus der obigen Zeilennormalform der erweiterten Matrix abgelesen werden. Es ist $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems ist nach Abschnitt 15.11 des Skriptes durch

  $$\vec{x}_0 + \operatorname{Kern}(A) = \left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

  gegeben.

$\square$

Aufgabe 84:
Bringe zunächst die erweiterte Matrix $(A|\vec{b})$ durch Zeilenumformungen auf Zeilennormalform

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha & 2 \\ 0 & 1 & 2-3\alpha & \alpha-6 \\ 0 & 1 & -1-2\alpha & -3 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha & 2 \\ 0 & 1 & -1-2\alpha & -3 \\ 0 & 0 & 3-\alpha & \alpha-3 \end{pmatrix}.$$

- $\alpha \neq 3$: In diesem Fall ist (siehe Abschnitt 15.12 des Skriptes) $\dim \operatorname{Bild}(A) = \operatorname{Rang}(A) = 3$. Also ist $\operatorname{Bild}(A) = \mathbb{R}^3$. Nach der Dimensionsformel (siehe Abschnitt 15.13 des Skriptes ist $3 = \operatorname{Rang}(A) + \dim \operatorname{Kern}(A)$. Also ist $\dim \operatorname{Kern}(A) = 0$ und $\operatorname{Kern}(A) = \left\{\vec{0}\right\}$.

  Nach Abschnitt 15.11 des Skriptes ist das lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar. Die Lösung $\vec{x}$ erhält man in diesem Fall durch

$$(A|\vec{b}) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha & 2 \\ 0 & 1 & -1-2\alpha & -3 \\ 0 & 0 & 3-\alpha & \alpha-3 \end{pmatrix} \;\Big|\cdot\tfrac{1}{3-\alpha}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2+\alpha \\ 0 & 1 & 0 & -4-2\alpha \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6+3\alpha \\ 0 & 1 & 0 & -4-2\alpha \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

  also $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6+3\alpha \\ -4-2\alpha \\ -1 \end{pmatrix}$.

- $\alpha = 3$: In diesem Fall ist $\dim \operatorname{Bild}(A) = \operatorname{Rang}(A) = 2$ (siehe Abschnitt 15.12 des Skriptes). Da $\operatorname{Bild}(A)$ der lineare Spann der Spalten von A ist (siehe (2) im Abschnitt 15.10 des Skriptes), muss

$$\operatorname{Bild}(A) = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}\right\} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}\right\} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

  gelten.

  Berechne weiter die Zeilennormalform der erweiterten Matrix

$$(A|\vec{b}) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Den Kern von A kann man mit dem (-1)-Ergänzungstrick (siehe Abschnitt 15.11 des Skriptes) aus der Zeilennormalform von A ablesen und erhält

$$\operatorname{Kern}(A) = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}10\\-7\\-1\end{pmatrix}\right\}.$$

Eine partikuläre Lösung $\vec{x}_0$ des linearen Gleichungssystems kann aus der obigen Zeilennormalform der erweiterten Matrix abgelesen werden. Es ist $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems ist nach Abschnitt 15.11 des Skriptes durch

$$\vec{x}_0 + \mathrm{Kern}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 10 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

gegeben.

□

http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm1phys2016w/