Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Michal Jex

WS2017/18
23.10.2017

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

1. Übungsblatt

Aufgabe 1: Direkte und indirekte Beweise

Zeigen Sie die folgendes Aussagen.

(a) Wenn $n \in \mathbb{N}$ gerade ist, dann auch n^2.

(b) $n \in \mathbb{N}$ ist gerade, wenn n^2 gerade ist.

(c) $n \in \mathbb{N}$ und $4^n - 1$ ist Primzahl, dann ist n ungerade.

(d) $a, b \in \mathbb{N}$ und $a + b > 10$ impliziert $a > 5$ oder $b > 5$.

Aufgabe 2: Induktion

Zeigen Sie dass

(a) es gibt unendlich viele Primzahlen.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$.

(c) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $\forall n > n_0$ gilt $2^n \geq n^2$. Finden sie die kleinste natürliche Zahl n_0 so, dass die Aussage wahr ist.

(d) $n \in \mathbb{N}$ dann $8^n - 3^n$ ist durch 5 teilbar.

Aufgabe 3: Binomialkoeffizienten

Zeigen Sie

(a) $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix}$, für $n, k \in \mathbb{N}$ und $n \geq k + 1$.

(b) $\begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$, für $n, k \in \mathbb{N}$ und $n \geq k$.

(c) Beweis dass $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ ganzzahlig für $n, k \in \mathbb{N}$, $n \geq k$ ist.

(d) $\begin{pmatrix} n \\ h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-k \\ h \end{pmatrix}$, für $n, k, h \in \mathbb{N}$: $n \geq h$, $n \geq k$, $n - h \geq k$ und $n - k \geq h$.

— Bitte wenden! —

Aufgabe 4: Körperaxiomen
Sei K ein Körper mit der Addition $+$ und Multiplikation $\cdot$. Zeigen Sie, dass

(a) die Gleichung $a + x = b$ für alle $a, b \in K$ eine eindeutige Lösung hat.

(b) die Gleichung $a \cdot x = b$ für alle $a, b \in K$, $a \neq 0$ eine eindeutige Lösung hat.

(c) $-(-x) = x$.

(d) $y^{-1}x^{-1} = (yx)^{-1}$.

Aufgabe 5: Negation
Negieren Sie folgende Aussagen:

(a) Alle Karlsruher fahren mit dem Fahrrad und der Straßenbahn.

(b) Wenn morgen schönes Wetter ist, gehen alle Studierenden in den Schlossgarten.

(c) Ich gehe immer ins Kino, wenn "Herr der Ringe" oder "James Bond" laufen.

(d) Es gibt einen Menschen, dem Mathematik keinen Spaß macht.

Aufgabe 6:
Es seien X, Y, Z Mengen und $f : X \to Y$, sowie $g : Y \to Z$ Abbildungen. Zeigen Sie oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel die folgenden Aussagen:

(i) Ist f und g injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.

(ii) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist auch g injektiv.

(iii) Ist f und g surjektiv, so ist auch $g \circ f$ surjektiv.

(iv) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist auch f surjektiv.

(v) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist auch g surjektiv.

(vi) Ist f und g bijektiv, so ist auch $g \circ f$ bijektiv.

(vii) Ist $g \circ f$ surjektiv und g injektiv, so ist f surjektiv.

(viii) Ist $g \circ f$ nicht injektiv, so gilt: f ist nicht injektiv und g ist nicht injektiv.

(ix) Ist $g \circ f$ nicht surjektiv, so gilt: f ist nicht surjektiv und g ist nicht surjektiv.

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die erste halbe von allen Aufgaben besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.