Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Michal Jex

WS2017/18
30.10.2017

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 1:

Vorbemerkung
Für $k, n \in \mathbb{N}$ definiert man

$$k|n :\leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N} : k \cdot m = n\,,$$

in Worten "k teilt n (ohne Rest)". $2|n$ ist gleichbedeutend mit "n ist gerade".

Für $n \in \mathbb{N}$ definiert man

$$n \,\text{ist prim}\, :\leftrightarrow (\exists! k > 1 : k|n) \exists m \in \mathbb{N} : k \cdot m = n\,.$$

(a) $n \in \mathbb{N}$ gerade heißt, es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 2k$. Somit ist $n^2 = 2 \cdot (2k^2)$, also ist auch n^2 gerade.

(b) Für festes $n \in \mathbb{N}$ sei A die Aussage "n ist gerade" und B die Aussage "n^2 ist gerade". Statt $B \implies A$ zeigen wir $\neg A \implies \neg B$:
Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade $\neg A$. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 2k - 1$. Also ist $n^2 = 2(2k^2 - 2k + 1) - 1$, also ist auch n^2 ungerade ($\neg B$).

(c) Für festes $n \in \mathbb{N}$ sei A die Aussage "n ist ungerade" und B die Aussage "$4^n - 1$ ist Primzahl". Statt $B \implies A$ zeigen wir $\neg A \implies \neg B$:
Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade $\neg A$. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 2k$. Also ist $4^{2k} - 1 = (4^k - 1)(4^k + 1)$, also ist auch $4^k \pm 1 > 1$. Dann $4^{2k} - 1$ ist nicht Primzahl ($\neg B$).

(d) Für festes $a, b \in \mathbb{N}$ sei A die Aussage "$a > 5$ oder $b > 5$" und B die Aussage "$a + b > 10$". Statt $B \implies A$ zeigen wir $\neg A \implies \neg B$:
Sei $a \leq 5$ und $b \leq 5$ ist $\neg A$. Dann gilt $a + b \leq 10$ ($\neg B$).

Aufgabe 2:

(a) Sei $n > 1$. Dann sind n und $n + 1$ teilfremd (keine natürliche Zahl außer der Eins gibt, die beide Zahlen teilt) und die Zahl $N_1 = n(n + 1)$ hat mindestens zwei verschiedene Primzahlteiler. Da $n(n+1)$ und $n(n+1)+1$ teilfremd sind, hat $N_2 = n(n+1)(n(n+1)+1)$ mindestens drei verschiedene Primzahlteiler. Wir können diesen Schritt unendlichmal machen.

(b) Zu zeigen ist $\sum_{j=1}^{n} j^3 = \left(\sum_{j=1}^{n} j\right)^2$.
"$n = 1$": $1 = 1$, ok.
"$n \to n + 1$":

$\sum_{j=1}^{n+1} j^3 = (n+1)^3 + \sum_{j=1}^{n} j^3 = (n+1)^3 + \left(\sum_{j=1}^{n} j\right)^2 = (n+1)^3 + \left(\frac{(n+1)n}{2}\right)^2 =$
$(n+1)^2 \left(n+1+\frac{n^2}{4}\right) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\sum_{j=1}^{n+1} j\right)^2$

(c) Es ist

n	1	2	3	4	5	...
n^2	1	4	9	16	25	...
2^n	2	4	8	16	32	...
$2^n \geq n^2$	w	w	f	w	w	...

Induktionsanfang bei $n = 4$: $2^4 = 16 \geq 16 = 4^2$.
Sei nun $n \geq 4$ "$n \to n+1$":
Für $n \geq 4$: $2n^2 - (n+1)^2 \geq n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2 \geq 7 > 0$
$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2n^2 \geq (n+1)^2$

(d) "$n = 1$": $8 - 3 = 5$, ok.
"$n \to n+1$": $5|(8^n - 3^n)$
$8^{n+1} - 3^{n+1} = 8^{n+1} + 3 \cdot 8^n - 3 \cdot 8^n - 3^{n+1} = 5 \cdot 8^n - 3(8^n - 3^n)$

Aufgabe 3:

(a) $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!(n+k-n)!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n-k+k+1)n!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n-k)n!+(k+1)n!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!}{(k)!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$
$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix} = \frac{n!}{(k)!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$

(c) Wir haben, dass $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = 1, \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 1, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1, \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} = n$ ist ganzzahlig. Die andere Binomialkoeffizienten sind ganzzahlig durch vollständige Induktion mit (b).

(d) $\begin{pmatrix} n \\ h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-h \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{h!(n-h)!} \frac{(n-h)!}{(k)!(n-k-h)!} = \frac{n!}{h!(n-k)!} \frac{(n-k)!}{(k)!(n-k-h)!} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-k \\ h \end{pmatrix}$

Aufgabe 4:

Erinnerung:
(A1) $\forall x, y, z \in K : (x+y)+z = x+(y+z)$
(A2) $\forall x, y \in K : x+y = y+x$
(A3) $\exists 0 \in K \forall x \in K : x+0 = x = 0+x$
(A4) $\forall x \in K \exists (-x) \in K : x+(-x) = 0$

(M1) $\forall x, y, z \in K : (x+y)z = xz+yz$
(M2) $\forall x, y \in K : xy = yx$
(M3) $\exists 1 \in K \forall x \in K : 1x = x$
(M4) $\forall x \in K \exists x^{-1} \in K : xx^{-1} = 1 = x^{-1}x$

(a) Zu zeigen ist die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung einer Gleichung, in Formeln

$$\forall a, b \in K \exists ! x \in K : a + x = b$$

Existenz (Beweis durch Einsetzen) $a \in K$ besitzt ein additiv Inverses, $-a \in K$. Damit ist $b + (-a)$, kurz $b - a$, eine Lösung der Gleichung, denn

$$a + (b - a) \overset{\text{A2}}{=} a + (-a + b) \overset{\text{A1}}{=} (a + (-a)) + b \overset{\text{A4}}{=} 0 + b \overset{\text{A3}}{=} 0$$

Eindeutigkeit Sei x_1 und x_2 sind Lösungen dann $a + x_1 = b$ und $a + x_2 = b$.

$$\begin{aligned} b &= b \\ a + x_1 &= a + x_2 \\ -a + (a + x_1) &= -a + (a + x_2) \\ (-a + a) + x_1 &\overset{\text{A1}}{=} (-a + a) + x_2 \\ x_1 &\overset{\text{A3,A4}}{=} x_2 \end{aligned}$$

Zu zeigen ist die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung einer Gleichung, in Formeln

$$\forall a, b \in K : a \neq 0 \Rightarrow \exists ! x \in K : a \cdot x = b\,.$$

Existenz (Beweis durch Einsetzen) $a \in K$ besitzt wegen $a \neq 0$ ein multiplikativ Inverses, $a^{-1} \in K$. Damit ist $b \cdot a^{-1}$), kurz $\frac{b}{a}$, eine Lösung der Gleichung, denn

$$a \cdot \frac{b}{a} = a \cdot (b \cdot a^{-1}) \overset{\text{M2}}{=} a \cdot (a^{-1} \cdot b) \overset{\text{M1}}{=} (a \cdot a^{-1}) \cdot b \overset{\text{m4}}{=} 1 \cdot b \overset{\text{M3}}{=} b$$

Eindeutigkeit Sei x_1 und x_2 sind Lösungen dann $a \cdot x_1 = b$ und $a \cdot x_2 = b$.

$$\begin{aligned} b &= b \\ a \cdot x_1 &= a \cdot x_2 \\ a^{-1} \cdot (a \cdot x_1) &= a^{-1}(a \cdot x_2) \\ (a \cdot a^{-1})x_1 &\overset{\text{M1}}{=} (a \cdot a^{-1})x_2 \\ x_1 &\overset{\text{M3,M4}}{=} x_2 \end{aligned}$$

(b) Das Negative (additiv Inverse) von $-x$, $-(-x)$, ist x den $(-x) + x = x + (-x) = 0$.

(c) Für $x, y \neq 0$ ist $xy(y^{-1}x^{-1}) = xy(xy)^{-1} = 1$.

Aufgabe 5:

(a) Die Aussage “Alle Karlsruher fahren mit dem Fahrrad und der Straßenbahn” entsteht aus den beiden Teilaussagen:
A : “Alle Karlsruher fahren mit dem Fahrrad.”
B : “Alle Karlsruher fahren mit der Straßenbahn.”
mittels der logischen Verknüpfung *wedge* (und). Negation ergibt

$$\neg(A \wedge B) \Longleftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

also lautet die Negation obiger Aussage “Es gibt einen Karlsruher, der nicht mit dem Fahrrad fährt, oder es gibt einen Karlsruher, der nicht mit der Straßenbahn fährt” bzw. kurz “Es gibt einen Karlsruher, der nicht mit dem Fahrrad oder nicht mit der Straßenbahn fährt”.

(b) Es sei A die Aussage “Morgen ist schönes Wetter” und B die Aussage “Alle Studierenden gehen in den Schlossgarten”, dann müssen wir $A \Rightarrow B$ verneinen. Es gilt:

$$\neg(A \Rightarrow B) \iff \neg((\neg A) \vee B) \iff (\neg(\neg A) \wedge (\neg B)) \iff A \wedge (\neg B)$$

Somit lautet die Negation des Satzes: “Morgen ist schönes Wetter, und es gibt einen Studierenden, der nicht in den Schlossgarten geht”.

(c) Betrachten wir die drei Aussagen
A : “Im Kino läuft Herr der Ringe”,
B : “Im Kino läuft James Bond”,
C : “Ich gehe ins Kino”,
dann entspricht die Aussage “Ich gehe immer ins Kino, wenn Herr der Ringe oder James Bond laufen”: $(A \vee B) \Rightarrow C \iff (\neg E \vee C)$ ist

$$\neg((A \vee B) \Rightarrow C) \iff \neg(\neg(A \vee B) \vee C) \iff ((A \vee B) \wedge \neg C)\,.$$

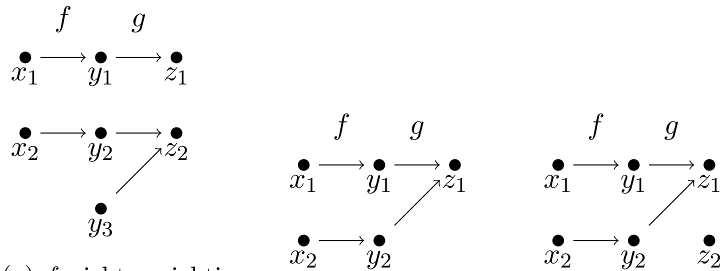
In Worten: “Im Kino läuft ein Herr der Ringe- oder ein James Bond-Film, und ich gehe (dennoch) nicht ins Kino”.

(d) Wir wollen die Aussage

$$\exists x \,\text{mit}\, A(x) : B(x)$$

negieren, wobei die Aussageformen $A(x)$ und $B(x)$ durch
$A(x)$:“x ist ein Mensch.”
$B(x)$:“Mathematik macht x keinen Spaß.”
gegeben sind. Wegen $\neg(\exists x \,\text{mit}\, A(x) : B(x)) \iff (\forall x \,\text{mit}\, A(x) : \neg B(x))$ ist die Negation der ursprünglichen Aussage: ”Allen Menschen macht Mathematik Spaß“.

Aufgabe 6:



(a) f nicht surjektiv
g nicht injektiv

(b) f injektiv

(c) f surjektiv

Abbildung 1: Gegenbeispiele

(i) Die Aussage ist wahr, denn: Seien $x, y \in X$ beliebig. Zu zeigen ist $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \Rightarrow x = y$. Es gilt in der Tat

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \quad &\Leftrightarrow \quad g(f(x)) = g(f(y)) \\ &\overset{g \text{ injektiv}}{\Rightarrow} \quad f(x) = f(y) \\ &\overset{f \text{ injektiv}}{\Rightarrow} \quad x = y. \end{aligned}$$

(ii) Die Aussage ist falsch. Siehe Abbildung 1a: g ist nicht injektiv, denn $g(y_2) = g(y_3) = z_2$.

(iii) Die Aussage ist wahr, denn: Sei $z \in Z$ beliebig. Zu zeigen ist $\exists x \in X : (g \circ f)(x) = z$. Da g surjektiv ist, existiert ein $y \in Y$ mit $g(y) = z$. Da f surjektiv ist, existiert ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Für dieses x gilt in der Tat $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$.

(iv) Die Aussage ist falsch. Siehe Abbildung 1a: f ist nicht surjektiv, denn $y_3 \notin f(X)$.

(v) Die Aussage ist wahr, denn: Sei $z \in Z$ beliebig. Zu zeigen ist $\exists y \in Y : g(y) = z$. Da $(g \circ f)$ surjektiv ist, existiert ein $x \in X$ mit $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = z$. Mit der Wahl $y = f(x) \in Y$ gilt tatsächlich $g(y) = z$.

(vi) Die Aussage ist wahr, denn: Nach (i) ist $(g \circ f)$ injektiv. Nach (iii) ist $(g \circ f)$ surjektiv. Also ist $(g \circ f)$ bijektiv.

(vii) Die Aussage ist wahr, denn: Sei $y \in Y$ beliebig. Zu zeigen ist $\exists x \in X : f(x) = y$. Betrachte dazu $g(y) \in Z$. Da $(g \circ f)$ surjektiv ist, existiert ein $x \in X$ mit $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y)$. Da g injektiv ist, muss aber $f(x) = y$ gelten.

(viii) Die Aussage ist falsch: Siehe Abbildung 1b: f ist injektiv.

(ix) Die Aussage ist falsch: Siehe Abbildung 1c: f ist surjektiv.

$\square$