Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Michal Jex

WS2017/18
3.11.2017

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 2. Übungsblatt

Aufgabe 7:

(a) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt (quadratische Ergänzung)

$$x^2 - x + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4}. \tag{1}$$

Also ist A nach unten durch $\frac{7}{4}$ beschränkt. Einsetzen von $x = \frac{1}{2}$ in (1) zeigt $\frac{7}{4} \in A$. Also ist $\min(A) = \inf(A) = \frac{7}{4}$.

Wir zeigen, dass $\sup(A)$ und $\max(A)$ nicht existieren, da A nicht nach oben beschränkt ist. Sei dazu $\gamma \in \mathbb{R}$ beliebig. Setze $x := \max\{\gamma, 2\}$. Dann gilt

$$A \ni a := x^2 - x + 2 > x^2 - x = x\underbrace{(x-1)}_{\geq 1} \geq x \geq \gamma.$$

Also kann tatsächlich kein $\gamma \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke von A sein.

(b) Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt (quadratische Ergänzung)

$$n + \frac{1}{n} = \left(\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 + 2 \geq 2. \tag{2}$$

Also ist B nach unten durch 2 beschränkt. Einsetzen von $n = 1$ in (2) zeigt $2 \in B$. Also ist $\min(B) = \inf(B) = 2$.

Wir zeigen, dass $\sup(B)$ und $\max(B)$ nicht existieren, da B nicht nach oben beschränkt ist. Sei dazu $\gamma \in \mathbb{R}$ beliebig. Aus Vorlesung wissen wir, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \gamma$ gibt. Dann gilt

$$B \ni b := n + \frac{1}{n} > n > \gamma.$$

Also kann tatsächlich kein $\gamma \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke von B sein.

□

Aufgabe 8:

(a) Für jedes $0 < x \leq 42$ gilt (quadratische Ergänzung)

$$x + \frac{1}{x} = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2 \geq 2. \tag{3}$$

Also ist A nach unten durch 2 beschränkt. Einsetzen von $0 < x = 1 \leq 42$ in (3) zeigt $2 \in A$. Also ist $\min(A) = \inf(A) = 2$.

Wir zeigen, dass $\sup(A)$ und $\max(A)$ nicht existieren, da A nicht nach oben beschränkt ist. Sei dazu $\gamma \in \mathbb{R}$ beliebig. Setze $x := \frac{1}{|\gamma|+1}$. Es ist $0 < x \leq 1$ und demnach gilt

$$A \ni a := x + \frac{1}{x} > \frac{1}{x} = 1 + |\gamma| > |\gamma| \geq \gamma.$$

Also kann tatsächlich kein $\gamma \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke von A sein.

(b) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$0 \leq \frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{\underbrace{1+x^2}_{>0}} < 1. \tag{4}$$

Also ist B nach unten durch 0 und nach oben durch 1 beschränkt. Einsetzen von $x = 0$ in (4) zeigt $0 \in B$. Also ist $\min(B) = \inf(B) = 0$.

Wir wollen $\sup(B) = 1$ zeigen und verwenden dafür Aufgabe 11 (a). Sei also $\varepsilon > 0$ beliebig. Setze $x := \sqrt{\frac{|1-\varepsilon|}{\varepsilon}} + 1$. Es gilt tatsächlich

$$\begin{aligned}
& \tfrac{x^2}{1+x^2} > 1 - \varepsilon \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 > (1-\varepsilon)(1+x^2) = (1-\varepsilon) + x^2(1-\varepsilon) \\
\Leftrightarrow \quad & x^2(1-(1-\varepsilon)) > (1-\varepsilon) \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 = \left(\sqrt{\tfrac{|1-\varepsilon|}{\varepsilon}} + 1\right)^2 > \tfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \\
\Leftrightarrow \quad & \text{wahr.}
\end{aligned}$$

Also ist $\sup(B) = 1$. Da nach (4) $1 \notin B$, existiert $\max(B)$ nicht.

□

Aufgabe 9:

(a)

- *Induktionsanfang (IA):*
  Für $n = 1$ gilt $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = 1 = (n+1)! - 1$.

- *Induktionsschluss (IS):*
  Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte die *Induktionsvoraussetzung (IV)*

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1.$$

Dann gilt für $n+1$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! &= (n+1) \cdot (n+1)! + \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! \\
&\overset{\text{(IV)}}{=} (n+1) \cdot (n+1)! + (n+1)! - 1 \\
&= (n+1)! \cdot (n+2) - 1 = (n+2)! - 1.
\end{aligned}$$

Die Aussage lässt sich wie folgt direkt zeigen. Es gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! &= \sum_{k=1}^{n}(k+1-1)\cdot k! = \sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)k! - k!\right] = \sum_{k=1}^{n}(k+1)! - \sum_{k=1}^{n} k! \\
&\overset{\text{Indexshift}}{=} \sum_{k=2}^{n+2} k! - \sum_{k=1}^{n} k! \underset{\text{summe}}{\overset{\text{Teleskop-}}{=}} (n+1)! - 1.
\end{aligned}$$

(b)

- *Induktionsanfang (IA):*
  Für $n = 1$ gilt $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k^2 = 1 = (-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}$.

- *Induktionsschluss (IS):*
  Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte die *Induktionsvoraussetzung (IV)*

  $$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k^2 = (-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}.$$

  Dann gilt für $n+1$

  $$\begin{aligned}
  \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}k^2 &= (-1)^{n+2}(n+1)^2 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k^2 \\
  &\overset{\text{(IV)}}{=} (-1)^{n+2}(n+1)^2 + (-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2} \\
  &= (-1)^{n+2}(n+1)\cdot\left((n+1) - \frac{n}{2}\right) \\
  &= (-1)^{n+2}(n+1)\frac{n+2}{2}.
  \end{aligned}$$

□

Aufgabe 10:

(a)

- *Induktionsanfang (IA):*
  Für $n = 1$ gilt $\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = 1 = \frac{n^n}{n!}$.

- *Induktionsschluss (IS):*
  Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte die *Induktionsvoraussetzung (IV)*

  $$\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \frac{n^n}{n!}.$$

  Dann gilt für $n+1$

  $$\begin{aligned}
  \prod_{k=1}^{(n+1)-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \overset{\text{(IV)}}{=} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{n^n}{n!} \\
  &= \frac{(n+1)^n}{n^n}\cdot\frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)^n}{n!}\cdot\frac{n+1}{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}.
  \end{aligned}$$

(b)
- *Induktionsanfang (IA):*
  Für $n = 1$ gilt $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 = \frac{1(1+1)(2\cdot1+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

- *Induktionsschluss (IS):*
  Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte die *Induktionsvoraussetzung (IV)*

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

  Dann gilt für $n+1$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= (n+1)^2 + \sum_{k=1}^{n} k^2 \overset{\text{(IV)}}{=} (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= (n+1) \cdot \frac{6(n+1) + n(2n+1)}{6} = (n+1) \cdot \frac{6n + 6 + 2n^2 + n}{6} \\
&= (n+1) \cdot \frac{2n^2 + 7n + 6}{6} = (n+1) \cdot \frac{(n+2)(2n+3)}{6}.
\end{aligned}$$

Die Aussage lässt sich wie folgt direkt zeigen. Nach dem Hinweis gilt (Teleskopsumme)

$$\begin{aligned}
n^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 - \sum_{k=1}^{n} (k-1)^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 - \sum_{k=1}^{n} (k^3 - 3k^2 + 3k - 1) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (3k^2 - 3k + 1) = 3 \sum_{k=1}^{n} k^2 - 3 \sum_{k=1}^{n} k + n
\end{aligned}$$

Nach Beispiel (2) des Abschnittes 4.8 des Skriptes gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Einsetzen und Auflösen nach $\sum_{k=1}^{n} k^2$ liefert die gesuchte Formel

$$\begin{aligned}
n^3 = 3 \sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{3n(n+1)}{2} + n \quad &\Leftrightarrow \quad n(n+1)(n-1) + \frac{3n(n+1)}{2} = 3 \sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 11:

(a) $\alpha = \sup M$ bedeutet, dass α die obere Schranke ist und dass α eine kleinste obere Schranke ist. Erste Hälfte der Aussage ($\forall x \in M : x \leq \alpha$) gibt dass α eine obere Schranke ist. Die andere Hälfte können wir schreiben als

$$\alpha = \sup M \Rightarrow \forall \epsilon > 0 : \exists x \in M : x > \alpha - \epsilon\,.$$

Statt $B \implies A$ zeigen wir $\neg A \implies \neg B$ als

$$\exists \epsilon > 0 : \forall x \in M : x \leq \alpha - \epsilon \Rightarrow \alpha \neq \sup M \, .$$

Es ist wahr weil $\alpha - \epsilon$ ist eine obere Schranke kleiner als α und dann α kann nicht ein Supremum sein.

(b) Wir benutzen die zweite Hälfte aus 11 (a). Wir definieren die Folge mit $\epsilon = \frac{1}{n}$ als

$$a_n \in M : \alpha - \frac{1}{n} < a_n \leq \alpha$$

Diese Folge hat Grenzwert α. Wir können es mit dem Sandwichsatz schauen.

□

Aufgabe 12:

(a) Hier steht die Differenz zweier divergenter Folgen. Die Folge ist äquivalent zu

$$a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \, .$$

Wir können auch schreiben

$$0 \leq a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \, .$$

Die Folge an die rechte Seite ein Nullfolge ist, können wir den Sandwichsatz benutzen zu bekommen

$$\lim_{n \to 0} a_n = 0 \, .$$

(b) Erst vermuten wir, dass 2 Grentzwert ist, weil

$$a = \frac{a}{2} + 1$$

die Lösung $a = 2$ hat. Wir haben

$$a_{n+1} - 2 = \frac{a_n - 2}{2} \, .$$

und auch

$$|a_{n+1} - 2| = \frac{|a_n - 2|}{2} \, .$$

Wann $|a_1 - 2| = |c - 2|$ dann $|a_n - 2| = \frac{|c-2|}{2^{n-1}}$. Dan für jedes ϵ haben wir n $\epsilon > \frac{|c-2|}{2^{n-1}}$.

(c) Erst wir haben

$$1 = 1^{\frac{1}{n}} \leq a_n = (1 + c^n)^{\frac{1}{n}} \leq 2^{\frac{1}{n}} \to 1 \, .$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $x \geq y$. Dann

$$x = (x^n)^{\frac{1}{n}} \leq (x^n + y^n)^{\frac{1}{n}} \leq x \left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}} \leq x \cdot 2^{\frac{1}{n}} \to x \, .$$

(d) Weil a_n beschränkt ist, $\exists C \in \mathbb{R} \forall n \geq n_0 \, |a_n| \leq C$. Dann

$$0 \leq |a_n b_n| \leq C \, |b_n| \to 0 \, .$$

□