Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Michal Jex

WS2017/18
30.10.2017

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

3. Übungsblatt

Aufgabe 13:
Zwischen welchen der Mengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}^2, (0,1), \mathbb{R}, \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^2$ existiert ein Isomorphism?

Aufgabe 14:
Seien $x \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \ldots, a_m, b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ mit $a_k = 0$ für $k \in \{m+1, \ldots, m+n\}$ bzw. $b_l = 0$ für $l \in \{n+1, \ldots, m+n\}$. Zeigen Sie

$$\left(\sum_{k=0}^{m} a_k x^k\right)\left(\sum_{l=0}^{n} b_l x^l\right) = \sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{l=0}^{k} a_{k-l} b_l\right) x^k.$$

Aufgabe 15:
Sei $x \geq 0$.

(i) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ konvergiert.

(ii) Zeigen Sie, dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n := \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$ konvergiert und dass

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} a_n}$$

gilt.

Hinweis: $\left(1 - \frac{x}{n}\right)\left(1 + \frac{x}{n}\right) = 1 - \frac{x^2}{n^2}$.

Aufgabe 16:
Untersuchen Sie auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

(a) $a_n = \frac{6n^2+3n-4}{1+n^2}$

(b) $a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$,

(c) $a_n = \frac{n^2-1}{n+3} - \frac{n^3+1}{n^2+1}$,

(d) $a_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{3^{n+k}}}$,

(e) $s_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{k}{n^4}$,

(f) $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$,

(g) $s_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

— Bitte wenden! —

Aufgabe 17:

Wieviele Summanden enthält die Partialsumme mindestens, damit sie die folgenden Reihen bis auf einer Fehler von 10^{-10} approximieren:

(a) $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$,

(b) $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Aufgabe 18:

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$

(ii) $\forall \epsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N : |a_n - a| \leq \epsilon$.

Aufgabe 19:

Sei $c > 0$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die durch $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)$ rekursiv definierte Folge mit $a_0 > 0$. Es is bekannt, dass $r_n := a_n - \sqrt{c}$ eine Nullfolge ist. Zeigen Sie dass:

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $r_{n+1} \leq \frac{r_n^2}{2\sqrt{c}}$.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $r_{n+1} \leq 2\sqrt{c}\left(\frac{r_1}{2\sqrt{c}}\right)^{2^n}$.

Bemerkung: (a) und (b) zeigen, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ extrem schnell gegen $\sqrt{c}$ konvergiert (quadratische Konvergenz)!

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 13, 15 und 17 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.