Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Michal Jex

WS2017/18
10.11.2017

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 13:
Wir zeigen, dass eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}^2$ existiert, dass Bijektion zwischen $(0,1), \mathbb{R}, \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^2$ existiert und dass keine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und $(0,1)$ existiert.

- $\mathbb{N} \Leftrightarrow \mathbb{Z}$:
  Man kann Bijektion schreiben als

$$f(1) = 0$$
$$f(2k) = k$$
$$f(2k+1) = -k$$

  wo $k \in \mathbb{N}$.

- $\mathbb{N}^2 \Leftrightarrow \mathbb{N}$:
  Man kann Bijektion schreiben als

$$f(n,m) = \frac{(n+m-2)(n+m-1)}{2} + m\,.$$

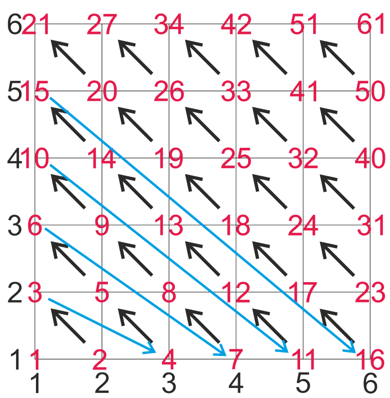

Abbildung 1: Bijektion zwischen $\mathbb{N}^2$ und $\mathbb{N}$

Bemerkung: Mit diese Bijektion wir können auch Bijection zwischen $(\mathbb{N}^3, \mathbb{N})$ machen als

$$\tilde{f}(n,m,l) = f(f(n,m),l)\,.$$

- $(0,1) \Leftrightarrow \mathbb{R}^+$:
  Wir haben:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x}\,, && f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ f(x) &= \frac{1}{x}\,, && f:(0,1) \to (1,\infty) \\ f(x) &= \frac{1}{x} - 1\,, && f:(0,1) \to \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

- $(0,1) \Leftrightarrow \mathbb{R}$:
  Wir haben:

$$\begin{aligned} f(x) &= \tan(x)\,, && f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R} \\ f(x) &= \tan(\pi x)\,, && f:\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \to \mathbb{R} \\ f(x) &= \tan\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right)\,, && f:(0,1) \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

- $\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathbb{R}^2$:
  Bijection zwischen $(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$ ist äquivalente zum Bijection zwischen $((0,1),(0,1)^2)$ und auch $([0,1),[0,1)^2)$. Wir benutzen Cantor-Schröder-Bernstein theorem.
  Cantor-Schröder-Bernstein theorem Sei existieren Injections $f:A\to B$ und $g:B\to A$, dann existiert Bijection h zwischen A und B.
  Beweisidee: Wir definieren die Mengen:

$$\begin{aligned} C_0 &:= A \setminus g(B) \\ C_{n+1} &:= C_{n+1} := g(f(C_n)) \qquad \text{für } n \geqq 0 \\ C &= \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n\,. \end{aligned}$$

  Für alle $x \in A$ haben wir

$$h(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in C, \\ g^{-1}(x), & \text{falls } x \notin C. \end{cases}$$

  Dann muss man zeigen, dass diese Funktion $h\colon A \to B$ die gewünschte Bijektion ist. Man muss beachten, dass diese Definition von h nicht konstruktiv ist, d. h., es gibt kein Verfahren, um für beliebige Mengen A, B und Injektionen f, g in endlich vielen Schritten zu entscheiden, ob ein x aus A in C liegt oder nicht. Für spezielle Mengen und Abbildungen kann das natürlich möglich sein.
  Injection $[0,1) \to [0,1)^2$ ist leicht, z.B.

$$f(x) = (x, 0.5)\,.$$

  Die andere ist schwerer. Wir schreiben Zahl x als $0.x_1x_2x_3\ldots$ und wir sagen, dass wir benutzen Dezimalstelledarstellung mit 0 (Problem $0.4\overline{9} = 0.5\overline{0}$). Dann es gibt ein Injection als

$$f(x,y) = 0.x_1y_1x_2y_2x_3y_3\ldots\,.$$

- $\mathbb{N} \not\Leftrightarrow (0,1)$:
  Wir zeigen dieser Aussage mit einem indirektem Beweis. Wir voraussetzen Existenz des Bijektion f zwischen $\mathbb{N}, (0,1)$ und zeigen, dass f keine Bijektion ist. Existiert eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to (0,1)$, dann wir können alle Zahlen schreiben als

$$\begin{aligned}
f(1) &= 0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}\dots \\
f(2) &= 0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}\dots \\
f(3) &= 0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}\dots \\
f(4) &= 0.a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}a_{45}\dots \\
f(5) &= 0.a_{51}a_{52}a_{53}a_{54}a_{55}\dots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

  wo wir Dezimalstelledarstellung mit 0 (Problem $0.4\overline{9} = 0.5\overline{0}$) benutzen. Jetzt machen wir eine Zahl aus $(0,1)$, welche ist nicht auf die Liste $f(n)$. Wir definieren diesen Zahl $b = 0.b_1b_2b_3b_4\dots$ als

$$\begin{aligned}
b_i &= 1\,, \quad a_{ii} \neq 1 \\
b_i &= 2\,, \quad a_{ii} = 1\,.
\end{aligned}$$

  Zahl b ist nicht auf die Liste $f(n)$, weil sie mindestens eine unterschiede Zahl in Dezimalstelledarstellung hat. Deshalb existiert eine Zahl im $(0,1)$ ohne Urbild im N, deshalb ist f keine Bijektion.

$\square$

Aufgabe 14:
Wir führen einen Beweis durch vollständige Induktion über m.

- *IA* ($m = 0$):
  Es gilt

$$\left(\sum_{k=0}^{m} a_k z^k\right)\left(\sum_{l=0}^{n} b_l z^l\right) = a_0\left(\sum_{l=0}^{n} b_l z^l\right) = \sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{l=0}^{k} a_{k-l}b_l\right) z^k$$

  für alle $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ mit $a_k = 0$ für $k \in \{1, \dots, n\}$.

- *IS* ($m \rightsquigarrow m+1$):
  Sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses m gelte die Induktionsvoraussetzung (IV)

$$\left(\sum_{k=0}^{m} \tilde{a}_k \tilde{z}^k\right)\left(\sum_{l=0}^{n} \tilde{b}_l \tilde{z}^l\right) = \sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{l=0}^{k} \tilde{a}_{k-l}\tilde{b}_l\right) \tilde{z}^k$$

  für jedes $\tilde{z} \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $\tilde{a}_0, \dots, \tilde{a}_m, \tilde{b}_0, \dots, \tilde{b}_n \in \mathbb{C}$ mit $\tilde{a}_k = 0$ für $k \in \{m+1, \dots, m+n\}$

bzw. $\tilde{b}_l = 0$ für $l \in \{n+1, \dots, m+n\}$. Dann gilt für $m+1$

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=0}^{m+1} a_k z^k\right)\left(\sum_{l=0}^{n} b_l z^l\right) &= \left(a_{m+1} z^{m+1} + \sum_{k=0}^{m} a_k z^k\right)\left(\sum_{l=0}^{n} b_l z^l\right) \\
&= a_{m+1} z^{m+1}\left(b_n z^n + \sum_{l=0}^{n-1} b_l z^l\right) + \left(\sum_{k=0}^{m} a_k z^k\right)\left(\sum_{l=0}^{n} b_l z^l\right) \\
&\overset{\text{(IV)}}{=} a_{m+1} b_n z^{m+n+1} + \sum_{l=0}^{n} a_{m+1} b_l z^{l+m+1} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{\substack{l=0,\\ k-l\neq m+1}}^{k} a_{k-l} b_l\right) z^k \\
&\overset{\substack{\text{Index-}\\ \text{shift}}}{=} a_{m+1} b_n z^{m+n+1} + \sum_{k=m+1}^{m+n+1} a_{m+1} b_{k-m-1} z^k \\
&\quad + \sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{l=0}^{k} a_{k-l} b_l\right) z^k + \sum_{k=m+1}^{m+n}\left(\sum_{\substack{l=0,\\ k-l\neq m+1}}^{k} a_{k-l} b_l\right) z^k \\
&= a_{m+1} b_n z^{m+n+1} + \sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{l=0}^{k} a_{k-l} b_l\right) z^k \\
&\quad + \sum_{k=m+1}^{m+n}\left(a_{m+1} b_{k-m-1} + \sum_{\substack{l=0,\\ k-l\neq m+1}}^{k} a_{k-l} b_l\right) z^k \\
&= a_{m+1} b_n z^{m+n+1} + \sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{l=0}^{k} a_{k-l} b_l\right) z^k \\
&\quad + \sum_{k=m+1}^{m+n}\left(\sum_{l=0}^{k} a_{k-l} b_l\right) z^k \\
&= a_{m+1} b_n z^{m+n+1} + \sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{l=0}^{k} a_{k-l} b_l\right) z^k \\
&= \sum_{k=0}^{m+n+1}\left(\sum_{l=0}^{k} a_{k-l} b_l\right) z^k.
\end{aligned}$$

alternativ Beweis:

$$\left(\sum_{k=0}^{m} a_k x^k\right)\left(\sum_{l=0}^{n} b_l x^l\right) = \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}\left(a_k x^k b_l x^l\right) = \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} a_k b_l x^{k+l} = \sum_{r=0}^{m+n}\sum_{l=0}^{n} a_{r-l} b_l x^r$$

□

Aufgabe 15:

(a) Wir zeigen, dass die Folge ist monoton und beschränkt, weil alle monotonen beschrekten Folgen konvergent sind.
steigende Folge Wir zeigen, dass $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^n \left(1+\frac{x}{n+1}\right) = \left(1-\frac{x}{(n+x)(n+1)}\right)^n \left(1+\frac{x}{n+1}\right)$$

An der ersten Klammer benutzen wir Bernoulli Ungleichung

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \left(1-\frac{nx}{(n+x)(n+1)}\right)\left(1+\frac{x}{n+1}\right) = \left(\frac{1}{1+\frac{nx}{(n+x)(n+1)}}\right)\left(1+\frac{x}{n+1}\right)$$

Es gilt, dass

$$1+\frac{nx}{(n+x)(n+1)} \leq 1+\frac{x}{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{1+\frac{nx}{(n+x)(n+1)}} \geq \frac{1}{1+\frac{x}{n+1}}$$

und deshalb

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{1}{1+\frac{x}{n+1}}\left(1+\frac{x}{n+1}\right) \geq 1\,.$$

Sei $\frac{x}{n} < 1$, dann kann man diese Beweise an der Folge $b_n = \left(1-\frac{x}{n}\right)^n$ benutzen und zeigen, dass $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$ auch steigend ist.
beschränkte Folge Sei $\frac{x}{n} < 1$ dann

$$0 \leq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \leq 1\,.$$

Wir können auch schreiben

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \frac{1}{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}\,.$$

An der rechte Seite haben wir fallende Folge, weil $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$ eine positiv steigende Folge ist. Die Folge $a_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ ist beschränkt, weil sie positiv ist und sie auch von der fallenden Folge $\frac{1}{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}$ beschränkt ist.

(b) Auf Vorlesung hatten wir, dass die Folge $\frac{f_n}{g_n}$ konvergiert zum $\frac{\lim f_n}{\lim g_n}$ wann f_n, g_n konvergenten Folgen sind und g_n nicht Nullfolge ist. Wir können schreiben

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \frac{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = \frac{\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$$

Der Nenner ist konvergent und positiv $(1 \leq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n)$. Der Zahler konvergiert gegen 1 weil

$$1-\frac{x^2}{n} \leq \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n \leq 1$$

wo wir Bernoulli Ungleichung benutzen haben.

□

Aufgabe 16:

(a) Man kann schreiben

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{6n^2+3n-4}{1+n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{6+\frac{3}{n}-\frac{4}{n^2}}{1+\frac{1}{n}} = 6.$$

(b) Man kann zeigen, dass

$$a_n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \le 1^n = 1\,,$$
$$1-\frac{1}{n} = 1-\frac{n}{n^2} \le \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = a_n\,.$$

Wegen $1-\frac{1}{n}\to 1$, gilt nach dem Sandwichtheorem $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

(c) Wir ausklammen n^3 als

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n+3}-\frac{n^3+1}{n^2+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{(n^2-1)(n^2+1)-(n^3+1)(n+3)}{(n^2+1)(n+3)}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n^4-1-(n^4+3n^3+n+3)}{(n^2+1)(n+3)} = \lim_{n\to\infty}\frac{-3n^3-n-4}{(n^2+1)(n+3)}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{-3-\frac{1}{n^2}-\frac{4}{n^3}}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)} = -3.
\end{aligned}$$

(d) Nach dem Binomialsatz gilt für jedes $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
a_n &= \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{3^{n+k}}} = \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{3^k}1^{n-k}}\\
&= \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{3}\right)^n} = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{4}{9}\right)^n}.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\frac{1}{2} = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n} \le \underbrace{\sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{4}{9}\right)^n}}_{=a_n} \le \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{4}{8}\right)^n} = \frac{1}{2}\sqrt[n]{2}$$

für jedes $n\in\mathbb{N}$.

Wegen $\sqrt[n]{2}\to 1$, gilt nach dem Sandwichtheorem $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

(e) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{k}{n^4} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n^2}k = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\frac{n^2(n^2+1)}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}+\frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

(f) Die Reihe $\sum\frac{1}{n(n+1)}$ ist konvergent, weil $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Es gilt

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} = 1-\frac{1}{n+1}$$

Dann
$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$$

(g) Man kann schreiben
$$s_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = \frac{2}{1}\frac{3}{2}\frac{4}{3} \dots \frac{n+1}{n} = n+1\,.$$
Deshalb $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$ konvergiert nicht.

□

Aufgabe 17:

(a) Die n-te Teilsumme ist
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{10}\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}}$$
weil $\sum_{k=1}^{n} q^k = q\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = q(1+q+\ldots+q^{n-1}) = q\frac{1-q^n}{1-q}$ wahr ist. Dann können wir schreiben
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{10}\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{9}\,.$$
Der Fehler der n-ten Teilsumme ist
$$\frac{1}{9} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{10^k} = 10^{-n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{9\cdot 10^n}\,.$$
Damit dieser Fehler kleiner als 10^{-10} ist muss also $n \geq 10$ sein. Für 10 Stellen Genauigkeit reicht also die 10-te Partialsumme. Mit jedem weiteren Summanden erhöht sich die Genauigkeit um eine Stelle. Die Anzahl der gültigen Stellen wächst also linear mit der Zahl der Summanden.

(b) Die n-te Partialsumme s_N ist nach dem Leibniz-Kriterium konvergenten Reihe.
Leibnitz-Kriterium Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende, reelle Nullfolge, dann konvergiert die alternierende Reihe $s = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$.
Beweis: Wir zeigen, dass die Teilfolge $(s_0, s_2, s_4, \dots) = (s_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent ist. Da die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist, gilt
$$s_{2k+2} = s_{2k} - a_{2k+1} + a_{2k+2} \leq s_{2k}, \quad k \in \mathbb{N}\,,$$
das heißt die Folge $(s_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist ebenfalls monoton fallend. Sie ist außerdem nach unten beschränkt, denn
$$s_{2k} = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{2k-2} - a_{2k-1}) + a_{2k} \geq a_{2k} \geq 0\,.$$
Die Folge $(s_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist also nicht nur monoton fallend, sondern auch nach unten beschränkt und damit nach dem Monotoniekriterium konvergent. Die Folge $(s_1, s_3, s_5, \dots) = (s_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ ist ebenfalls konvergent (ähnliches Argument wie oben, aber monoton steigend). Das Grenzwert für $(s_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$, $(s_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ sind gleich weil
$$s_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} (s_{2k} - a_{2k+1}) = \lim_{k\to\infty} s_{2k}$$

wegen $\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = 0$ gilt.
Das Leibniz-Kriterium liefert eine Abschätzung für den Grenzwert, denn bei derartig alternierenden Reihen liegt der Grenzwert immer zwischen zwei aufeinanderfolgenden Partialsummen. Sei $s_N = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n a_n$ N-te Partialsumme der Reihe $s = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ mit einer monoton fallenden Nullfolge a_n. Dann gilt für alle $s_{2k-1} \le s \le s_{2k}$. Die Intervalle $[s_{2k}, s_{2k+1}],\ k \in \mathbb{N}$ bilden eine Intervallschachtelung. Der Grenzwert ist in jedem dieser Intervalle enthalten. Für den Fehler der N-ten Teilsumme gilt

$$|s_N - s| \le |s_N - s_{N+1}| = \frac{1}{n+1}$$

Damit dieser Fehler sicher kleiner als 10^{-10} ist, muss man $n \ge 10^{10}$ wählen. Um die Genauigkeit um den Faktor 10 zu verbessern muss man demnach zehnmal soviele Summanden berücksichtigen.

□

Aufgabe 18:
(i) impliziert (ii) ist leicht, weil $|a_n - n| < \epsilon \Rightarrow |a_n - n| \le \epsilon$. Die andere Richtung kann man zeigen als

$$\forall \frac{\epsilon}{2} > 0 \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a| \le \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \Rightarrow \forall \tilde{\epsilon} > 0 \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \tilde{\epsilon}\,.$$

□

Aufgabe 19:

(a) Wir haben

$$r_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n} - 2\sqrt{c}\right) = \frac{a_n^2 - 2a_n\sqrt{c} + c}{2a_n} = \frac{(a_n - \sqrt{c})^2}{2a_n} = \frac{r_n^2}{2a_n} \le \frac{r_n^2}{2\sqrt{c}}\,.$$

The letzte Ungleichung gilt, weil r_n ein positive Nullfolge ist.

(b) Wir beweisen diese Ungleichung durch Iteration mit (a).

$$\begin{aligned} r_{n+1} &\le \tfrac{r_n^2}{2\sqrt{c}} \le \tfrac{r_{n-1}^4}{(2\sqrt{c})^{1+2}} \le \tfrac{r_{n-2}^8}{(2\sqrt{c})^{1+2+4}} \le \dots \\ &\le \tfrac{r_1^{2^n}}{(2\sqrt{c})^{1+2+4+\ldots+2^{n-1}}} = 2\sqrt{c}\left(\tfrac{r_1}{2\sqrt{c}}\right)^{2^n}\quad, \end{aligned}$$

da $\sum_{k=0}^{n-1} 2^k = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$ ist.

□