Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Michal Jex

WS2017/18
13.11.2017

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

4. Übungsblatt

Aufgabe 20:
Sei $x \in [0,1)$ und $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$. Wir definieren die Folge l_n als

$$l_n = \max\{m \in \mathbb{N}_0 | mk^{-n} \leq x\}k^{-n} \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}$$

und $l_0 = 0$. Wir definieren auch die Folge $c_n = k^n(l_n - l_{n-1})$. Zeigen Sie:

(a) $c_n \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$.

(b) $l_n = \sum_{j=1}^{n} c_j k^{-j}$.
Beispiel: Sei $k = 10$, $x = \frac{1}{2}$. Dann $c_1 = 5$ und $c_k = 0$, $k > 1$, d.h., wir haben die Dezimaldarstellung für $\frac{1}{2}$ als $(5, 0, 0, \ldots)$.

(c) $\forall x \in [0,1) \exists k$-adische Darstellung, d.h., eine monoton wachsende Folge $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $l_n \leq x < l_n + k^{-n}$.
Beispiel: Sei $k = 2$, $x = \frac{1}{2}$. Dann $c_1 = 1$ und $c_k = 0$, $k > 1$.
Sei $k = 3$, $x = \frac{1}{2}$. Dann $\forall k \in \mathbb{N} : c_k = 1$.

(d) $x = \lim_{n\to\infty} l_n$.

Aufgabe 21:
Sei a_n eine beschränkte Folge und $c_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Falls die Folge a_n gegen a konvergiert, dann konvergiert auch die Folge c_n gegen a.

(b) Falls die Folge c_n gegen a konvergiert, dann konvergiert auch die Folge a_n gegen a.

Aufgabe 22:
Finden Sie:

(a) eine Folge mit unendlichen vielen Häufungspunkten.

(b) eine Folge ohne Häufungspunkte.

Aufgabe 23:
Untersuchen Sie auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert der rekursiv definierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_{n+1} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} x_k}, \quad n \geq 1$$

und $x_1 = 1$.

— Bitte wenden! —

Aufgabe 24:
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, dann sind alle Teilfolgen $a_{\sigma(n)}$ konvergent.

(b) konvergiert ein Teilfolge $a_{\sigma(n)}$ des Folge a_n gegen a, dann ist a ein Häufungspunkt der Folge $a(n)$.

(c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge $\Leftrightarrow \limsup_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

(d) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a \Leftrightarrow \limsup_{n\to\infty} |a_n - a| = 0$.

(e) Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Dann

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n \,.$$

Geben Sie ein Beispiel, wo die Gleichheit nicht gilt.

Aufgabe 25:
Sei $(x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^{d} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ und $\|x\|_\infty := \max_{j=1,\ldots,d} |x_j|$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\forall 1 \leq p \leq \infty : \|\cdot\|_p$ ist eine Norm.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}^d \forall 1 < p < \infty : \|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq d^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty$.

(c) Sei $1 \leq p < q \leq \infty$, dann existieren Konstanten C_1 und C_2, $0 < C_1 \leq C_2 < \infty$, so, dass

$$C_1 \|x\|_p \leq \|x\|_q \leq C_2 \|x\|_p \,, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \,.$$

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgabe 20 und 25 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.