Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Michal Jex

WS2017/18
17.11.2017

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 20:

(a) Wir schreiben $l_n = m_n k^{-n}$ und $l_{n-1} = m_{n-1}k^{-n+1} = m_{n-1}kk^{-n}$. Wir haben

$$l_n - l_{n-1} = (m_n - m_{n-1}k)e^{-n}\,.$$

Zahlen m_n und $m_{n-1}k$ sind ganz. Wir müssen zeigen, dass $0 \le m_n - m_{n-1}k < k$. Wir können schreiben

$$\begin{aligned} m_n k^{-n} &\le x < (m_n+1)k^{-n}\,, \\ m_{n-1}k^{-n+1} &\le x < (m_{n-1}+1)k^{-n+1}\,, \end{aligned}$$

weil m_k Maximum ist. Diese Ungleichungen sind äquivalent mit

$$\begin{aligned} m_n &\le \frac{x}{k^{-n}} < (m_n+1)\,, \\ m_{n-1}k &\le \frac{x}{k^{-n}} < (m_{n-1}+1)k\,. \end{aligned}$$

Dann haben wir $m_n \le \frac{x}{k^{-n}}$, $m_{n-1}k > \frac{x}{k^{-n}} - k$, $m_n > \frac{x}{k^{-n}} - 1$ und $m_{n-1}k \le \frac{\alpha}{k^{-n}}$ deshalb

$$\begin{aligned} m_n - m_{n-1}k &< \frac{x}{k^{-n}} - \left(\frac{x}{k^{-n}} - k\right) < k\,, \\ m_n - m_{n-1}k &> \left(\frac{x}{k^{-n}} - 1\right) - \frac{x}{k^{-n}} > -1\,, \\ 1 < & m_n - m_{n-1}k < k\,. \end{aligned}$$

(b)
- *Induktionsanfang (IA):*
  Für $n = 0$ gilt $l_0 = \sum_{j=1}^{0} c_j k^{-j} = 0$ und für $n = 1$ gilt $l_1 = \sum_{j=1}^{1} c_j k^{-j} = m_1 k^{-1}$.
- *Induktionsschluss (IS):*
  Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte die *Induktionsvoraussetzung (IV)*

  $$l_n = \sum_{j=1}^{n} c_j k^{-j}.$$

  Dann gilt für $n+1$

  $$l_{n+1} = l_n + \frac{c_{n+1}}{k^{n+1}} = \sum_{j=1}^{n} c_j k^{-j} + \frac{c_{n+1}}{k^{n+1}} = \sum_{j=1}^{n+1} c_j k^{-j}\,.$$

(c) *monoton Folge*: $l_n = \frac{c_n}{k^n} + l_{n-1} \geq l_{n-1}$.

beschränkte Folge: $0 \leq l_1 \leq l_n \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{k-1}{k^j} = \frac{k-1}{k}\left(\frac{\left(\frac{1}{k}\right)^n - 1}{\frac{1}{k} - 1}\right) = 1 - \frac{1}{k^n} < 1$. Wir haben auch $l_n = m_n k^{-n} \leq x < (m_n + 1)k^{-n} = l_n + k^{-n}$.

(d) Wir haben

$$l_n \leq x \leq l_n + k^{-n}$$

und dann

$$l \leq x \leq l\,,$$

wo $l = \lim_{n\to\infty} l_n$.

□

Aufgabe 21:

(a) Diese Aussage ist wahr. Wir können schreiben

$$|c_n - a| = \left|\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) - a\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k - a)\right|\,.$$

Die Folge a_n ist konvergent, deshalb

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_1 \in \mathbb{N} \forall l > N_1 : |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}\,.$$

Dann für $n > N_1$

$$|c_n - a| \leq \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1}(a_k - a)\right| + \left|\frac{1}{n}\sum_{k=N_1+1}^{n}(a_k - a)\right| \leq \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{N_1}(a_k - a)\right| + \frac{\epsilon}{2}\,.$$

Man kann $N_2 \in \mathbb{N}$ finden so, dass

$$\forall n > N_2 : \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{N_1}(a_k - a)\right| < \frac{\epsilon}{2}\,.$$

Zusammen haben wir

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_2 \forall n > N_2 : |c_n - a| < \epsilon\,,$$

deshalb konvergiert Folge c_n gegen a.

(b) Wir zeigen, dass die Aussage falsch ist. Wir haben

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \leq \frac{1}{n}\,.$$

Die Folge $c_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k$ konvergiert gegen 0 aber $((-1)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist keine konvergent Folge.

□

Aufgabe 22:

(a) Wir definieren die Folge als

a_n	n						
b_1	1	2	4	7	11	16	22
b_2		3	5	8	12	17	23
b_3			6	9	13	18	24
b_4				10	14	17	25
b_5					15	18	26
$\vdots$						$\ddots$	$\vdots$

wo b_j sind verschiedene Häufungspunkte, z.B., $\mathbb{N}$ oder $\{1/n | n \in \mathbb{N}\}$.

(b) Die Folge $a_n = n$ hat kein Häufungspunkt, weil

$$\forall a \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : |a_n - a| > \epsilon \,.$$

□

Aufgabe 23:

Die Folge x_n ist konvergent, weil es monoton und beschränkt ist.
monoton Folge: Man kann sehen, dass x_n eine positive Folge ist, falls erstes Element positiv ist. Dann

$$x_{n+2} = \frac{1}{x_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} x_k} \leq \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} x_k} = x_{n+1}$$

für $n \in \mathbb{N}_0$.
beschränkte Folge: $0 \leq x_{n+1} \leq x_1 = 1$.
Grenzwert: Das Grenzwert kann nur in $[0,1]$ sein. Wir zeigen mit Widerspruch, dass Grenzwert kann nur 0 sein. Sei $a > 0$ die Grenzwert der Folges. Dann

$$x_{n+1} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} x_k} \leq \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} a} = \frac{1}{na}$$

wo wir die Monotonie der Folges benutzen haben. Wir haben auch

$$a \leq x_{n+1} \leq \frac{1}{na} \Leftrightarrow a^2 < \frac{1}{n}$$

aber es kann nicht wahr sein weil $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.
□

Aufgabe 24:

(a) Für alle Teilfolgen haben wir $n \leq \sigma(n)$. Wir wissen auch

$$\begin{aligned}
&a_n \text{ konvergent} \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N \forall n > N : |a_n - a| < \epsilon \,, \\
&a_{\sigma(n)} \text{ konvergent} \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists M \forall \sigma(n) > N : |a_{\sigma(n)} - a| < \epsilon \,, \\
&\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n > N : |a_n - a| < \epsilon \Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N \forall \sigma(n) > N : |a_{\sigma(n)} - a| < \epsilon \,.
\end{aligned}$$

(b) Wir müssen für alle $\epsilon > 0$ unendliche viele Punkte im Neben a finden. Man kann als diese Punkte Elemente der Teilfolges $a_{\sigma(n)}$ nehmen, weil

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n > N : |a_\sigma - a| < \epsilon \,.$$

(c) $\Rightarrow$: Auf Vorlesung hatten wir, dass

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$$

für allen konvergenten Folgen. Alle Nullfolgen konvergieren gegen 0.
$\Leftarrow$: Man kann schreiben

$$\begin{aligned} -|a_n| \le & a_n \le |a_n| \,, \\ \inf_{n\ge N} -|a_n| \le \inf_{n\ge N} a_n \le & a_n \le \sup_{n\ge N} a_n \le \sup_{n\ge N} |a_n| \,. \end{aligned}$$

Wir auch wissen, dass

$$\begin{aligned} -\inf_{n\ge N}(-x_n) &= \sup_{n\ge N} x_n \,, \\ -\sup_{n\ge N}(-x_n) &= \inf_{n\ge N} x_n \,. \end{aligned}$$

Zusammen haben wir

$$0 = -\limsup_{n\to\infty} |a_n| \le \lim_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} |a_n| = 0 \,.$$

(d) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a \Leftrightarrow (a_n - a)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Nullfolge ist.
Dann können wir (c) benutzen.

(e) Wir haben

$$\sup_{n\ge N}(a_n + b_n) \le \sup_{n\ge N} a_n + \sup_{n\ge N} b_n \,.$$

Dann können wir den Limes der Gleichung nehmen

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{n\ge N}(a_n + b_n) \le \lim_{N\to\infty} \sup_{n\ge N} a_n + \lim_{N\to\infty} \sup_{n\ge N} b_n \,.$$

Beispiel: $0 = a_n + b_n = [(-1)^n] + [-(-1)^n]$.

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} 0 &= 0 \,, \\ \limsup_{n\to\infty} a_n &= 1 \,, \\ \limsup_{n\to\infty} b_n &= 1 \,. \end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 25:

Erinnerung:
(N1) $\forall \vec{x} \in V \forall a \in K : \|a\vec{x}\| = |a|\|\vec{x}\|$
(N2) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V : \|\vec{x} + \vec{y}\| \le \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$
(N3) $\forall \vec{x} \in V : \|\vec{x}\| \ge 0$
(N4) $\|\vec{x}\| = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$

(a) $1 \leq p < \infty$:

(N1) $\|a\vec{x}\|_p = \|(ax_1, ax_2, \ldots, ax_d)\|_p = \left(\sum_{j=1}^d |ax_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j=1}^d |a|^p |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = (|a|^p)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^d |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |a| \left(\sum_{j=1}^d |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |a| \|(x_1, x_2, \ldots, x_d)\|_p = |a| \|\vec{x}\|_p$.

(N2) Wir benutzen, dass die Funktion $F(x) = x^p$ konvex ist, d.h.

$$F(x) = x^p \Rightarrow \forall 0 \leq \lambda \leq 1, x_1, x_2 \geq 0 : F((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda)F(x_1) + \lambda F(x_2)\,.$$

Wir beweisen dieser Eigenschaft später im Übungen. Falls $\vec{x} = 0$ oder $\vec{y} = 0$ ist, dann ist $\|\vec{x}+\vec{y}\|_p \leq \|\vec{x}\|_p + \|\vec{y}\|_p$ wahr. Sonst sind $\vec{X} = \frac{\vec{x}}{\|x\|_p}$, $\vec{Y} = \frac{\vec{y}}{\|y\|_p}$ mit $\|\vec{X}\|_p = 1$ und $\|\vec{Y}\|_p = 1$. Wir haben

$$|x_j + y_j|^p = (\|\vec{x}\|_p + \|\vec{y}\|_p)^p |(1-\lambda)X_j + \lambda Y_j|^p \leq (\|\vec{x}\|_p + \|\vec{y}\|_p)^p |(1-\lambda)|X_j| + \lambda |Y_j||^p\,,$$
$$|x_j + y_j|^p \leq (\|\vec{x}\|_p + \|\vec{y}\|_p)^p [(1-\lambda)|X_j|^p + \lambda |Y_j|^p]\,.$$

mit $\lambda = \frac{\|\vec{y}\|_p}{\|\vec{x}\|_p + \|\vec{y}\|_p}$. Wir können beide Seiten zusammenzählen

$$\sum_{j=1}^d |x_j + y_j|^p = \|\vec{x}+\vec{y}\|_p^p \leq (\|\vec{x}\|_p + \|\vec{y}\|_p)^p \sum_{j=1}^d [(1-\lambda)|X_j|^p + \lambda |Y_j|^p]\,,$$
$$\|\vec{x}+\vec{y}\|_p^p \leq (\|\vec{x}\|_p + \|\vec{y}\|_p)^p [(1-\lambda)\|\vec{X}\|^p + \lambda \|\vec{Y}\|^p] = (\|\vec{x}\|_p + \|\vec{y}\|_p)^p$$
$$\|\vec{x}+\vec{y}\|_p \leq \|\vec{x}\|_p + \|\vec{y}\|_p\,.$$

(N3) $|x_j| \geq 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^d |x_j|^p \geq 0 \Rightarrow \left(\sum_{j=1}^d |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq 0$.
(N4) $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^d |x_j|^p = 0 \Rightarrow \forall |x_j| : |x_j| = 0$.
$p = \infty$:
(N1) $\max_{j=1,\ldots,d} |ax_j| = \max_{j=1,\ldots,d} |a||x_j| = |a| \max_{j=1,\ldots,d} |x_j|$.
(N2) $|x_j + y_j| \leq |x_j| + |y_j| \Rightarrow \max_{j=1,\ldots,d} |x_j + y_j| \leq \max_{j=1,\ldots,d}(|x_j| + |y_j|) \leq \max_{j=1,\ldots,d} |x_j| + \max_{j=1,\ldots,d} |y_j|$.
(N3) $|x_j| \geq 0 \Rightarrow \max_{j=1,\ldots,d} |x_j| \geq 0$.
(N4) $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \max_{j=1,\ldots,d} |x_j| = 0 \Rightarrow \forall |x_j| : |x_j| = 0$.

(b) $\max_{j=1,\ldots,d} |x_j| = \max_{j=1,\ldots,d}(|x_j|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^d |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^d (\max_{k=1,\ldots,d} |x_k|)^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left((\max_{k=1,\ldots,d} |x_k|)^p \sum_{j=1}^d 1\right)^{\frac{1}{p}} = (d \max_{j=1,\ldots,d} |x_j|)^p)^{\frac{1}{p}} = d^{\frac{1}{p}} \max_{j=1,\ldots,d} |x_j|$.

(c) $q = \infty$: Wir benutzen (b). Dann $C_1 = \frac{1}{d^{\frac{1}{p}}}$ und $C_2 = 1$.

$q < \infty$: Man kann die Aussage mit (b) beweisen. Falls Normen A und B äquivalent sind und falls Normen B und C äquivalent sind, dann auch sind Normen A und C äquivalent, weil

$$\|\vec{x}\|_\infty \leq \|\vec{x}\|_p \leq d^{\frac{1}{p}} \|\vec{x}\|_\infty\,,$$
$$\|\vec{x}\|_\infty \leq \|\vec{x}\|_q \leq d^{\frac{1}{q}} \|\vec{x}\|_\infty\,,$$
$$d^{-\frac{1}{q}} \|\vec{x}\|_q \leq \|\vec{x}\|_p \leq d^{\frac{1}{p}} \|\vec{x}\|_q\,.$$

□