Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Michal Jex

WS2017/18
24.11.2017

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 5. Übungsblatt

Aufgabe 26:
Sei im Folgendem immer $w = u + \mathrm{i}v$ und $z = x + \mathrm{i}y$.

(a) $\overline{\overline{z}} = \overline{x - \mathrm{i}y} = x + \mathrm{i}y = z$

(b) $\overline{w} \cdot \overline{z} = (u - \mathrm{i}v)(x - \mathrm{i}y) = xu - vy + \mathrm{i}(-vx - uy)$
$\overline{wz} = \overline{(u + \mathrm{i}v)(x + \mathrm{i}y)} = \overline{ux - vy + \mathrm{i}(uy + vx)} = xu - vy - \mathrm{i}(vx + uy)$

(c) $|wz|^2 = wz\overline{wz} = w\overline{w}z\overline{z} = |w|^2|z|^2$

(d) Für jede komplexe Zahl gilt $\mathrm{Re}(z) \leq |z|$, weil

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{x^2} = |\mathrm{Re}(x)| \geq x\,.$$

Also ist $|wz| = |w||z| = |w||\overline{z}| = |w\overline{z}| \geq \mathrm{Re}(w\overline{z})$, weil $|w| = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{u^2 + (-v)^2} = |\overline{w}|$.

□

Aufgabe 27:

(i) Sei $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
z \in A \quad &\Leftrightarrow \quad |z + 1 + \mathrm{i}| = |z - 3 - 3\mathrm{i}| \\
&\Leftrightarrow \quad |(x + 1) + \mathrm{i}(y + 1)|^2 = |(x - 3) + \mathrm{i}(y - 3)|^2 \\
&\Leftrightarrow \quad (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = (x - 3)^2 + (y - 3)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 + 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 \\
&\Leftrightarrow \quad 2x + 2y + 2 = -6x - 6y + 18 \\
&\Leftrightarrow \quad 8y = -8x + 16 \Leftrightarrow y = 2 - x,
\end{aligned}$$

d.h. $A = \{z \in \mathbb{C} |\, \mathrm{Im}(z) = 2 - \mathrm{Re}(z)\}$. Also ist A eine Gerade in der komplexen Zahlenebene. Siehe auch Abbildung (1).

(ii) Sei $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
z \in C \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}(z^2) > 1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}((x + \mathrm{i}y)^2) > 1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy) > 1 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > \sqrt{1 + y^2} \Leftrightarrow x > \sqrt{1 + y^2} \vee x < -\sqrt{1 + y^2}.
\end{aligned}$$

Also ist $C = \left\{z \in \mathbb{C} |\, \mathrm{Re}(z) > \sqrt{1 + (\mathrm{Im}(z))^2}\right\} \cup \left\{z \in \mathbb{C} |\, \mathrm{Re}(z) < -\sqrt{1 + (\mathrm{Im}(z))^2}\right\}$. Siehe auch Abbildung (2).

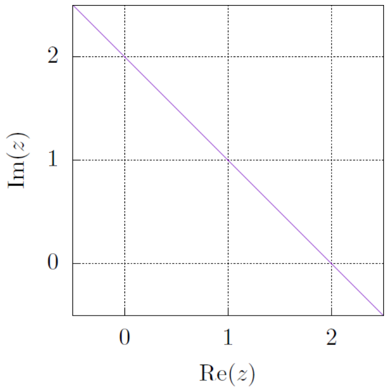

Abbildung 1: Menge A

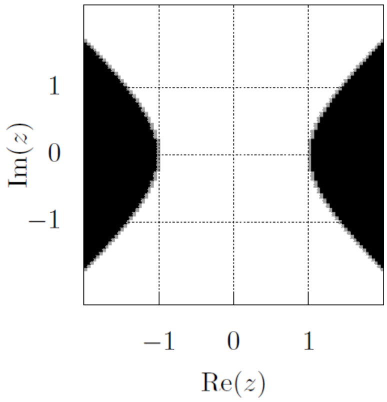

Abbildung 2: Menge B

(iii) Es gilt

$$\begin{aligned} A &= \{z \in \mathbb{C} |\, |z - \mathrm{i}| \geq 1 \wedge |z - 1 - 2\mathrm{i}| < 3\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} |\, |z - \mathrm{i}| \geq 1\} \cap \{z \in \mathbb{C} |\, |z - 1 - 2\mathrm{i}| < 3\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} |\, |z - 1 - 2\mathrm{i}| < 3\} \cap \{z \in \mathbb{C} |\, |z - \mathrm{i}| < 1\}^c \\ &= \{z \in \mathbb{C} |\, |z - 1 - 2\mathrm{i}| < 3\} \setminus \{z \in \mathbb{C} |\, |z - \mathrm{i}| < 1\}\,. \end{aligned}$$

Also ist A die offene Kugel um $1 + 2\mathrm{i}$ mit Radius 3 ohne die offene Kugel um i mit Radius 1. Siehe auch Abbildung (3).

(iv) Sei $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$z \in C \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z^2) \leq 1 \Leftrightarrow \mathrm{Im}((x + \mathrm{i}y)^2) \leq 1 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy) \leq 1 \Leftrightarrow xy \leq \frac{1}{2}.$$

Wir unterscheiden die folgenden Fälle.

- Ist $x = 0$, dann ist $z \in B$.
- Ist $x > 0$, dann ist $z \in C \Leftrightarrow y \leq \frac{1}{2x}$.
- Ist $x < 0$, dann ist $z \in D \Leftrightarrow y \geq \frac{1}{2x}$.

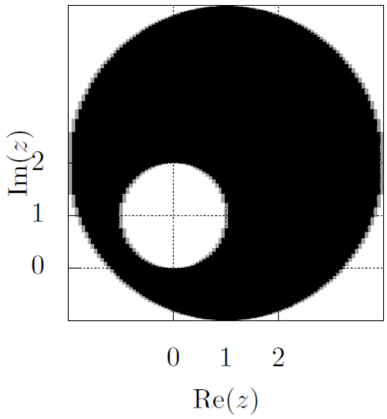

Abbildung 3: Menge C

Also gilt

$$\begin{aligned} D &= \{z \in \mathbb{C} |\operatorname{Re}(z) = 0\} \\ &\cup \left\{ z \in \mathbb{C} |\operatorname{Re}(z) > 0 \wedge \operatorname{Im}(z) \leq \frac{1}{2\operatorname{Re}(z)} \right\} \\ &\cup \left\{ z \in \mathbb{C} |\operatorname{Re}(z) < 0 \wedge \operatorname{Im}(z) \geq \frac{1}{2\operatorname{Re}(z)} \right\}. \end{aligned}$$

Siehe auch Abbildung (4).

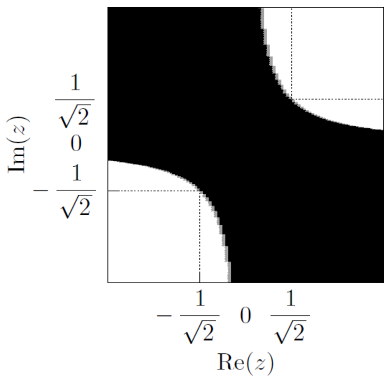

Abbildung 4: Menge D

$\square$

Aufgabe 28:

(a) Im Folgenden sei $w = a + ib \in \mathbb{C}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

(i) Es gilt

$$\begin{aligned} w^3 &= (a + ib)^3 = a^3 + 3a^2(ib) + 3a(ib)^2 + (ib)^3 = a^3 + 3ia^2b - 3ab^2 - ib^3 \\ &= a(a^2 - 3b^2) + ib(3a^2 - b^2). \end{aligned}$$

Einsetzen von $w = 4 - 3\mathrm{i} = z$ liefert

$$\mathrm{Re}(z^3) = 4(4^2 - 3(-3)^2) = -44, \qquad \mathrm{Im}(z^3) = -3(3 \cdot 4^2 - (-3)^2) = -117.$$

Ferner gilt

$$\left|w^3\right| = \sqrt{(w^3)\overline{w^3}} = \left(\sqrt{w\overline{w}}\right)^3 = |w|^3 .$$

Da $|z| = \sqrt{4^2+9} = \sqrt{25} = 5$, folgt $\left|z^3\right| = |z|^3 = 125$.

(ii) Für $w \neq 0$ gilt

$$\frac{1}{w} = \frac{\overline{w}}{w\overline{w}} = \frac{\overline{w}}{|w|^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \mathrm{i}\frac{b}{a^2+b^2}.$$

Einsetzen von $w = 4 - 3\mathrm{i} = z$ liefert

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{4}{25}, \qquad \mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{3}{25}.$$

Ferner gilt für $w \neq 0$

$$\left|\frac{1}{w}\right| = \left|\frac{\overline{w}}{|w|^2}\right| = \frac{1}{|w|^2}\,|a - \mathrm{i}b| = \frac{1}{|w|^2}\sqrt{a^2+(-b)^2} = \frac{|w|}{|w|^2} = \frac{1}{|w|}.$$

Also ist $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{5}$.

(iii) Es gilt

$$z \cdot w = (4 - 3\mathrm{i}) \cdot (-1 + 2\mathrm{i}) = -4 - 6(\mathrm{i})^2 + \mathrm{i}(8+3) = 2 + 11\mathrm{i}$$

und damit $\mathrm{Re}(z \cdot w) = 2$, $\mathrm{Im}(z \cdot w) = 5$, $|z \cdot w| = |z| \cdot |w| = 5\sqrt{5}$.

(iv) Es gilt

$$\begin{aligned}
\overline{z}^2 + \frac{1}{w^2} &= (4+3\mathrm{i})^2 + \frac{\overline{w}^2}{|w|^4} = 4^2 + 24\mathrm{i} - 9 + \frac{(-1-2\mathrm{i})^2}{25} = 7 + 24\mathrm{i} + \frac{1}{25}(1 + 4\mathrm{i} - 4) \\
&= 7 - \frac{3}{25} + \left(24 + \frac{4}{25}\right)\mathrm{i}
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(\overline{z}^2 + \frac{1}{w^2}) &= 7 - \frac{3}{25} = \frac{172}{25}, \qquad \mathrm{Im}(\overline{z}^2 + \frac{1}{w^2}) = 24 + \frac{4}{25} = \frac{604}{25}, \qquad \text{sowie} \\
\left|\overline{z}^2 + \frac{1}{w^2}\right| &= \sqrt{\left(\frac{172}{25}\right)^2 + \left(\frac{604}{25}\right)^2} = \frac{1}{25}\sqrt{364816 + 29584} = \frac{\sqrt{394400}}{25} = \frac{\sqrt{15776}}{5}.
\end{aligned}$$

(b) (i) Es gilt

$$\begin{aligned}
z^3 + 8 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x + \mathrm{i}y)^3 + 8 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x^3 + 3\mathrm{i}x^2y - 3xy^2 - \mathrm{i}y^3 + 8 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x^3 - 3xy^2 + 8 = 0 \wedge 3x^2y - y^3 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x^3 - 3xy^2 + 8 = 0 \wedge y(3x^2 - y^2) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x^3 - 3xy^2 + 8 = 0 \wedge (y = 0 \vee y = x\sqrt{3} \vee y = -x\sqrt{3}).
\end{aligned}$$

Wir betrachten die einzelnen Fälle.

- Ist $y = 0$, so gilt
$$x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{8} = -2$$
für alle $x \in \mathbb{R}$.

- Ist $y = x\sqrt{3}$, so gilt
$$x^3 - 9x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$$
für alle $x \in \mathbb{R}$. Das gibt die Lösung $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

- Ist $y = -x\sqrt{3}$, so gilt
$$x^3 - 9x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$$
für alle $x \in \mathbb{R}$. Das gibt die Lösung $z = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.

Insgesamt sind also genau $z_0 = -2$, $z_1 = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ und $z_2 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ Lösungen der Gleichung $z^3 + 8 = 0$.
Alternativ ist $z^3 = re^{\mathrm{i}\theta} \Leftrightarrow z = r^{\frac{1}{3}}e^{\frac{i\theta}{3}} \vee z = r^{\frac{1}{3}}e^{\frac{i(\theta+2\pi)}{3}} \vee z = r^{\frac{1}{3}}e^{\frac{i(\theta+4\pi)}{3}}$.

(ii) Dem Hinweis folgend, machen wir den Ansatz $z = (1+\mathrm{i})x$ mit $x \in \mathbb{R}$. Einsetzen in die Gleichung liefert
$$\begin{aligned} & ((1+\mathrm{i})x)^3 - (3-\mathrm{i})((1+\mathrm{i})x)^2 - \mathrm{i}(1+\mathrm{i})x + 1 + 3\mathrm{i} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (1 + 3\mathrm{i} + 3\mathrm{i}^2 - \mathrm{i})x^3 - (3-\mathrm{i})(1 + 2\mathrm{i} + \mathrm{i}^2)x^2 - \mathrm{i}(1+\mathrm{i})x + 1 + 3\mathrm{i} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (-2+2\mathrm{i})x^3 - (3-\mathrm{i})2\mathrm{i}x^2 - \mathrm{i}(1+\mathrm{i})x + 1 + 3\mathrm{i} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & -2x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0 \wedge 2x^3 - 6x^2 - x + 3 = 0. \end{aligned}$$
Addieren der beiden letzten Gleichungen liefert
$$-8x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} \vee x = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$
Also sind $z_0 = \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$ und $z_1 = \frac{-1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$ zwei der gesuchten Nullstellen des Polynoms $P(z) = z^3 - (3-\mathrm{i})z^2 - \mathrm{i}z + 1 + 3\mathrm{i}$. Nach dem Satz über die Polynomdivision lässt sich P durch $Q = (z - z_0) \cdot (z - z_1) = (z - \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}) \cdot (z + \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}) = \left(z^2 - \frac{(1+\mathrm{i})^2}{2}\right) = z^2 - \mathrm{i}$ dividieren. Tatsächlich ergibt die Polynomdivision
$$z^3 - (3-\mathrm{i})z^2 - \mathrm{i}z + 1 + 3\mathrm{i} = (z^2 - \mathrm{i}) \cdot (z - (3 - \mathrm{i})).$$
Die letzte Nullstelle lautet also $z_2 = (3 - \mathrm{i})$.

□

Aufgabe 29:

(a) $(1+\mathrm{i})^2 = 1 + 2\mathrm{i} - 1 = 0 + 2\mathrm{i} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

(b) $\left(1 + \frac{1}{\mathrm{i}}\right)^{-1} = \left(\frac{\mathrm{i}+1}{\mathrm{i}}\right)^{-1} = \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}+1} = \frac{\mathrm{i}(-\mathrm{i}+1)}{(\mathrm{i}+1)(-\mathrm{i}+1)} = \frac{1+\mathrm{i}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}$

(c) $(1+\mathrm{i})e^{i\frac{\pi}{3}} = (1+i)\left(\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right) = \frac{1-\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})\mathrm{i}}{2}$
$(1+\mathrm{i})e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$

(d) $e^{4+i\frac{\pi}{3}}e^{-2+i\frac{11\pi}{6}} = e^{2+i\frac{13\pi}{6}} = e^{2+i\frac{1\pi}{6}} = e^2\left(\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}\right) = \frac{e^2\sqrt{3}+e^2\mathrm{i}}{2}$

□

Aufgabe 30:
Funktionen $\sin(x)$ and $\cos(x)$ sind periodisch, d.h., $\exists T \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \mathbb{R} : f(x+T) = f(x)$. Die kleinste Periode von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ ist 2π. Wir können nur mit Nachkommaanteil von $\frac{x}{2\pi}$ arbeiten.

(a) Der Nachkommaanteil $x - \lfloor x \rfloor$

$$Cn - \lfloor Cn \rfloor = 0$$

weil C und n sind ganzen Zahlen. Dann ist a_n konstante Folge und $a_n = 1$ für $C \in \mathbb{N}$.

(b) Jede Razionale Zahl kann man als $\frac{m}{p}$ schreiben, wo $p \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ unteilbar sind. Dann haben wir

$$\frac{m}{p}(n+p) - \left\lfloor \frac{m}{p}(n+p) \right\rfloor = \frac{m}{p}(n) - \left\lfloor \frac{m}{p}(n) \right\rfloor$$

deshalb haben wir am hochsten p Häufungspunkten.

$$\frac{m}{p}n - \left\lfloor \frac{m}{p}n \right\rfloor = \begin{cases} \frac{0}{p}, & n = kp\,, \\ \frac{j}{p}, & n = kp + c\,, \end{cases}$$

mit $k \in \mathbb{N}$ und $c, j \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$. Man kann zeigen, dass j_1 ist gleich zu j_2 nur für gleich c. Dann haben wir p Häufungspunkten:

$$\left\{ \cos\left(2\pi\frac{k}{p}\right) + \mathrm{i}\sin\left(2\pi\frac{k}{p}\right) \middle| k \in \{0, 1, \ldots, p-1\} \right\}.$$

□

Aufgabe 31:

(a) $(a+b)^s = \frac{a+b}{(a+b)^{1-s}} = \frac{a}{(a+b)^{1-s}} + \frac{b}{(a+b)^{1-s}} \leq \frac{a}{a^{1-s}} + \frac{b}{b^{1-s}} = a^s + b^s$

(b) Für $q \leq p$ können wir schreiben

$$\|x\|_p^q = \left(\sum_{j=1}^d |x_j|^p\right)^{\frac{q}{p}} \leq \sum_{j=1}^d |x_j|^{p\frac{q}{p}} = \sum_{j=1}^d |x_j|^q = \|x\|_q^q$$

wo wir (a) benutzt haben. Wir haben auch

$$\forall x_1, x_2 \geq 0, q > 0 : x_1^q \leq x_2^q \Rightarrow x_1 \leq x_2\,,$$

weil x^q is monoton steigende Funktion für $x \geq 0$ und $q > 0$. Dann

$$\|x\|_p^q \leq \|x\|_q^q \Rightarrow \|x\|_p \leq \|x\|_q\,.$$

$\square$

Aufgabe 32:

(a) Erst zeigen wir, dass

$$z_n \to z \Rightarrow |z_n| \to |z|\,.$$

Sei $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ und $z = x + y$, dann $x_n \to x$ und $y_n \to y$, weil $z_n \to z$. Die Konvergenz der Folges z_n impliziert, dass $\forall\epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : |x_n - x| < \epsilon \wedge |y_n + -y| < \epsilon$. Wir können schreiben

$$||z_n| - |z|| = |\sqrt{x_n^2 + y_n^2} - \sqrt{x^2 + y^2}| = \frac{|x_n^2 + y_n^2 - (x^2 + y^2)|}{|\sqrt{x_n^2 + y_n^2} + \sqrt{x^2 + y^2}|} =$$
$$||z_n| - |z|| = \frac{|x_n^2 - x^2 + y_n^2 - y^2|}{|\sqrt{x_n^2 + y_n^2} + \sqrt{x^2 + y^2}|} < \epsilon \frac{|x_n + x + y_n + y|}{|z|^2}\,.$$

Wir haben, dass $\forall\tilde{\epsilon} > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : ||z_n| - |z|| < \tilde{\epsilon}$. Wir können wählen $\tilde{\epsilon} = |z|/2$ und schreiben

$$|z_n| > |z| - \tilde{\epsilon} = \frac{|z|}{2}\,.$$

(b) Wir müssen zeigen, dass

$$\left|\frac{1}{z_n} - \frac{1}{z}\right| < \epsilon\,.$$

Wir haben

$$\left|\frac{1}{z_n} - \frac{1}{z}\right| = \frac{|z - z_n|}{|z||z_n|} < 2\frac{|z_n - z|}{|z|^2} < 2\frac{\epsilon}{|z|^2}\,,$$

wo wir (a) und die Konvergenz der Folges z_n benutzt haben.

(c) Wir haben

$$\left|\frac{z_n}{w_n} - \frac{z}{w}\right| = \frac{|z_n w - z w_n|}{|w_n||w|} = \frac{|z_n w - z_n w_n + z_n w_n - z w_n|}{|w_n||w|} < \frac{|z_n||w_n - w|}{|w_n||w|} + \frac{|z_n - z|}{|w|} < \tilde{\epsilon}\,,$$

weil

$$\forall\epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : |z_n - z| < \epsilon\,,$$
$$\forall\epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : |w_n - w| < \epsilon\,.$$

$\square$