Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Michal Jex

WS2017/18
4.12.2017

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

7. Übungsblatt

Aufgabe 38: Mutter aller Konvergenzkriterien
Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $\sum a_n$ eine Reihe mit $a_n \neq 0$ für fast alle n. Zeigen Sie:

(a) $\sum a_n$ konvergiert absolut $\Leftrightarrow$ es existiert eine relle Reihe $\sum c_n$ mit $c_n > 0$ für fast alle n und $\frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|} \leq \frac{c_{n+1}}{c_n}$ für fast alle n.
Hinweis: Für die Richtung "$\Leftarrow$" analysieren Sie dem Beweis der Quotientenkriterium.

(b) Von der Bernoulli Ungleichung wissen wir $\forall 0 \leq x \leq 1, t \in N : (1-x)^t \geq 1 - tx$. Diese gilt auch für alle *relle* $p > 1$. Zeigen Sie:
Kriterium von Raabe-Duhamel Sei $\sum a_n$ eine Reihe im V mit $a_n \neq 0$ für fast alle n und $\frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|} \leq 1 - \frac{p}{n+1}$ mit $p > 1$. Dann die Reihe $\sum a_n$ konvergiert absolut.

(c) Sei $\sum a_n$ eine Reihe im $\mathbb{R}$ mit $a_n > 0$ für fast alle n und $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \frac{1}{n}$. Dann divergiert die Reihe $\sum a_n$.

Aufgabe 39:
Zeigen Sie die folgende Aussage:
Sei $(a_n)_n, (b_n)_n$ positive Nullfolgen und $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$. Dann gilt

$$0 < L < \infty \Rightarrow \sum a_n \text{ konvergient genau dann wenn} \sum b_n \text{ konvergiert}.$$

Aufgabe 40:
Zeigen Sie, dass das Quotientenkriterium besser Konvergenzkriterium als das Würzelkriterium ist, d.h.,

$$\limsup_{n\to\infty} \|a_n\|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|}.$$

Hinweis: Sei $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|}$ und $\epsilon > 0$. Was gilt für $\frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|}$ für n groß genug.

Aufgabe 41:
Betrachten Sie die alternierende Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$$

und auch

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots$$

(a) Beschreiben Sie die Umordnung $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
Hinweis: Betrachten Sie drei Fälle, 3 teilt n, 3 teilt $n-1$, 3 teilt $n-2$. Ingesamt $\frac{1}{3}$ der Elementen im τ sollen gerade sein.

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ konvergent ist aber die obene Umordnung divergiert.

— Bitte wenden! —

Aufgabe 42:
Untersuchen Sie die folgenden Reihen jeweils auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\binom{2n}{n}$,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$,

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-\sqrt[n]{a})$ mit $0<a<1$,

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$,

(v) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+4}{n^2-3n+1}$,

(vi) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+2}\right]$.

(vii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{1+x^{4n}}$ mit $x\in\mathbb{R}$,

(viii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}$,

(ix) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{n}$,

(x) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(3n)^n n!}$,

(xi) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{n}-2)^2}{n^2+\sqrt{n^4+1}}$,

(xii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+1]{n+1}}{n}$.

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgabe 38, 39, 40 und 41 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.