Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Michal Jex

WS2017/18
8.12.2017

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 38:

(a) $\Rightarrow$: Wann die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|$ konvergiert absolut, dann auch konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|$ und können wir die Reihe $\sum c_n$ als $\sum \|a_n\|$ definiereren.
$\Leftarrow$: Wir haben

$$\frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|} \leq \frac{c_{n+1}}{c_n} \quad \forall n \text{ groß genug}$$

dann gilt auch

$$\frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|}\frac{\|a_n\|}{\|a_{n-1}\|}\ldots \leq \frac{c_{n+1}}{c_n}\frac{c_n}{c_{n-1}}\ldots,$$
$$\frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_1\|} \leq \frac{c_{n+1}}{c_1},$$
$$\|a_{n+1}\| \leq \frac{\|a_1\|}{c_1}c_{n+1}.$$

Dann können wir Majorantenkriterium benutzen und zeigen, dass die Reihe $\sum \|a_n\|$ konvergiert.

(b) Wir nehmen die Folge

$$b_n := \frac{1}{n^p}.$$

Die Reihe $\sum b_n$ konvergiert absolut, wann $p > 1$ ist. Für $p > 1$ haben wir

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^p \overset{\text{Bernoulli}}{\geq} 1 - \frac{p}{n+1}$$

Letzter Schritt ist Majorantenkriterium zu benutzen als

$$\frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|} \leq 1 - \frac{p}{n+1} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

(c) Wir nehmen die Folge

$$b_n := \begin{cases} \frac{1}{n-1} & \text{für } n > 2, \\ 1 & \text{für } n = 1. \end{cases}$$

Wir wissen, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergiert und dass $\frac{b_{n+1}}{b_n} = 1 - \frac{1}{n}$ gleich ist. Dann impliziert Quotientenkriterium, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert, weil

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \frac{1}{n} = \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

□

Aufgabe 39:
Aus dem Konvergenz der Folge $\frac{a_n}{b_n}$ haben wir

$$L - \epsilon \leq \frac{a_n}{b_n} \leq L + \epsilon$$

für n groß genug. Dann haben wir auch

$$(L - \epsilon)b_n \leq a_n \leq (L + \epsilon)b_n$$

für n groß genug. Die Umgleichung gilt auch für die Reihen

$$\sum_{n=M}^{\infty} (L - \epsilon)b_n \leq \sum_{n=M}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=M}^{\infty} (L + \epsilon)b_n \,.$$

Dann können wir Majorantenkriterium und Minorantenkriterium benutzen. □

Aufgabe 40:
Für n groß genug haben wir, dass

$$\forall \epsilon \exists K_\epsilon \forall n \geq K_\epsilon : \frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|} < \alpha + \epsilon$$

und auch

$$\|a_n\| \leq (\alpha + \epsilon)^n \frac{\|a_{K_\epsilon}\|}{(\alpha + \epsilon)^{K_\epsilon}} \,.$$

Diese Umgleichung impliziert, dass

$$\sqrt[n]{\|a_n\|} \leq (\alpha + \epsilon) \sqrt[n]{\frac{\|a_{K_\epsilon}\|}{(\alpha + \epsilon)^{K_\epsilon}}} \,.$$

Dann nehmen wir die Limes superior von letzter Umgleichung

$$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} \leq \alpha + \epsilon \,.$$

□

Aufgabe 41:

(a) Sei

$$b_n := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4k-3}} & \text{für } n = 3k - 2, \\ \frac{1}{\sqrt{4k-1}} & \text{für } n = 3k - 1, \\ -\frac{1}{\sqrt{2k}} & \text{für } n = 3k \end{cases}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Offenbar ist (b_n) eine Umordnung von (a_n). Es gilt

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Dann die Umordnung τ ist

$$\tau := \begin{cases} n + \frac{n-1}{3} & \text{für } 3|n + 2, \\ n + \frac{n+1}{3} & \text{für } 3|n + 1, \\ \frac{2n}{3} & \text{für } 3|n \,. \end{cases}$$

(b) Sei $a_n := \frac{1}{\sqrt{n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Offenbar ist (a_n) eine streng monoton fallende Nullfolge. Damit ist die alternierende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ konvergent nach dem Leibnizkriterium. Sei (S_N) ihre Partialsummenfolge. Für die Teilfolge (S_{3n}) gilt

$$S_{3n} = \sum_{m=1}^{3n} b_m = \sum_{k=1}^{n} b_{3k-2} + \sum_{k=1}^{n} b_{3k-1} + \sum_{k=1}^{n} b_{3k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4k-3}} + \frac{1}{\sqrt{4k-1}} - \frac{1}{\sqrt{2k}}.$$

Es gilt

$$c_k := \frac{1}{\sqrt{4k-3}} + \frac{1}{\sqrt{4k-1}} - \frac{1}{\sqrt{2k}} \geq \frac{1}{\sqrt{4k}} + \frac{1}{\sqrt{4k}} - \frac{1}{\sqrt{2k}} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Also ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ divergent nach dem Minorantenkriterium. Folglich ist auch die Folge (S_N) — also die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ — divergent.

□

Aufgabe 42:

(i) Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \left|(-1)^n \binom{2n}{n}\right| &= \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(2n-n)!n!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{\prod_{j=1}^{2n} j}{\left(\prod_{j=1}^{n} j\right)^2} = \frac{\prod_{j=n+1}^{2n} j}{\prod_{j=1}^{n} j} \\ &\overset{\text{Indexshift}}{=} \frac{\prod_{j=1}^{n}(n+j)}{\prod_{j=1}^{n} j} = \prod_{j=1}^{n} \frac{n+j}{j} = \prod_{j=1}^{n} \underbrace{\left(1 + \frac{n}{j}\right)}_{\geq 2} \geq 2^n. \end{aligned}$$

Wegen $(2^n) \to \infty$, ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := \left((-1)^n\binom{2n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge. Aber es ist eine notwendige Bedingung dafür, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Also ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

(ii) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} b_n &:= \sqrt[n]{\left|\frac{n}{n+1}\right|^{n^2}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1}\right)^n \\ &= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Wegen $\left(\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right) \to \frac{1}{e}$ und $\left(\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-1}\right) \to 1$ gilt

$$\limsup_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{e} < 1.$$

Folglich ist $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ nach dem Wurzelkriterium (absolut) konvergent.

(iii) Für $0 < a < 1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $0 < \sqrt[n]{a} < 1$ und $0 < \sqrt[n+1]{a} < 1$. Deshalb gilt

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n+1]{\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n+1}} = \sqrt[n+1]{a\sqrt[n]{a}} < \sqrt[n+1]{a \cdot 1} = \sqrt[n+1]{a}.$$

Folglich ist $(1 - \sqrt[n]{a})_{n\in\mathbb{N}}$ (streng) monoton fallend. Ferner ist $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$. Nach dem Leibniz-Kriterium ist die alternierende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1 - \sqrt[n]{a})$ konvergent.

Erinnerung: Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\alpha^n - \beta^n = (\alpha - \beta) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{n-1-k} \cdot \beta^k. \tag{1}$$

Einsetzen von $\alpha = 1$, $\beta = \sqrt[n]{a}$ und Umstellen nach $\alpha - \beta$ liefert

$$\left|(-1)^n(1 - \sqrt[n]{a})\right| = 1 - \sqrt[n]{a} = \frac{1-a}{\sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\left(\sqrt[n]{a}\right)^k}_{\leq 1}} \geq \frac{1-a}{\sum_{k=0}^{n-1} 1} = (1-a) \cdot \frac{1}{n}.$$

Da die Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{1-a}{n} = (1-a) \cdot \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ divergent ist, liefert das Minorantenkriterium zusammen mit der obigen Abschätzung, dass $\sum_{n\geq 1}(-1)^n(1 - \sqrt[n]{a})$ *nicht* absolut konvergent ist.

(iv) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n := \frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$. Offenbar ist $a_n > 0$ und es gilt

$$b_n := \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)} = (n+1) \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}.$$

Wegen $\limsup_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}$ folgt mit dem Quotientenkriterium, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$ (absolut) konvergent ist.

(v) Für alle $n \geq 3$ gilt

$$a_n := \frac{n+4}{n^2 - 3n + 1} = \frac{n+4}{\underbrace{n(n-3)+1}_{>0}} \geq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \geq 0$$

und die harmonische Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ ist divergent nach z.B. Cauchysches Verdichtungskriterium. Folglich ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$ divergent nach dem Minorantenkriterium.

(vi) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left|(-1)^n \left[\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+2}\right]\right| = \left|\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+2}\right| = \left|\frac{(n+2)-(n+3)}{(n+3)(n+2)}\right| = \frac{1}{(n+3)(n+2)} \leq \frac{1}{n^2}$$

und die Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ ist konvergent nach z.B. Cauchysches Verdichtungskriterium. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left[\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+2}\right]$ ist nach dem Majorantenkriterium folglich auch absolut konvergent.

(vii) Natürlich ist $\sum_{n\geq 1} \frac{x^{2n}}{1+x^{4n}}$ konvergent für $x = 0$. Sei also im Folgenden $x \neq 0$. Dann ist $y := x^2 > 0$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{x^{2n}}{1+x^{4n}} = \frac{y^n}{1+y^{2n}} = \frac{1}{y^{-n}+y^n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{y}\right)^n + y^n}.$$

Ist $y = 1$, so gilt

$$\frac{x^{2n}}{1+x^{4n}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{y}\right)^n + y^n} = \frac{1}{1^n + 1^n} = \frac{1}{2}$$

und folglich ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := \left(\frac{x^{2n}}{1+x^{4n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge. Es ist aber eine notwendige Bedingung dafür, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Also ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{1+x^{4n}}$ divergent für $x^2 \in \{-1, 1\}$.

Ist $y \neq 1$, so ist $y < 1$ oder $\frac{1}{y} < 1$. O.B.d.A. sei $y < 1$. Dann gilt

$$\frac{x^{2n}}{1+x^{4n}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{y}\right)^n + y^n} < \frac{1}{\left(\frac{1}{y}\right)^n} = y^n.$$

Die geometrische Reihe $\sum_{n\geq 1} y^n$ mit dem Parameter $|y| = y < 1$ ist konvergent. Weil $|a_n| < y^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ausfällt, ist die Reihe $\sum_{n\geq 1} a_n$ (absolut) konvergent nach dem Majorantenkriterium.

(viii) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$b_n := \sqrt[n]{\left|\frac{1}{3^n}\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}\right|} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n \leq \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

und folglich ist

$$\limsup_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{3} < 1.$$

Nach dem Wurzelkriterium ist $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{3^n}\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}$ (absolut) konvergent.

(ix) Wegen

$$\left|\frac{\mathrm{i}^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

ist die Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{\mathrm{i}^n}{n}$ *nicht* absolut konvergent ($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist die harmonische Reihe, dass nicht konvergent ist).

Betrachte die N-te Partialsumme $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{\mathrm{i}^n}{n}$ für $N \in \mathbb{N}$. Die Reihe ist genau dann konvergent, wenn die Folge $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ konvergent ist.

Wir beginnen mit der Teilfolge (S_{2N}). Diese ist genau dann konvergent, wenn ihr Realteil und ihr Imaginärteil konvergent ist. Für $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
S_{2N} &= \sum_{n=1}^{2N} \frac{\mathrm{i}^n}{n} = \sum_{n=1}^{N}\left[\frac{\mathrm{i}^{2n-1}}{2n-1} + \frac{\mathrm{i}^{2n}}{2n}\right] = \sum_{n=1}^{N} \frac{\mathrm{i}^{2n-1}}{2n-1} + \sum_{n=1}^{N} \frac{\mathrm{i}^{2n}}{2n} \\
&= \frac{1}{\mathrm{i}} \cdot \sum_{n=1}^{N} \frac{(\mathrm{i}^2)^n}{2n-1} + \sum_{n=1}^{N} \frac{(\mathrm{i}^2)^n}{2n} = (-\mathrm{i}) \cdot \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{2n-1} + \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{2n} \\
&= \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{2n}}_{=\mathrm{Re}(S_{2N})} + \mathrm{i} \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}}_{=\mathrm{Im}(S_{2N})}.
\end{aligned}$$

Also ist $\mathrm{Re}(S_{2N})$ gerade die N-te Partialsumme der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k}$. Diese ist nach dem Leibniz-Kriterium konvergent. Ferner ist $\mathrm{Im}(S_{2N})$ gerade die N-te Partialsumme der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = (-1) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1}$. Diese ist ebenfalls konvergent nach dem Leibniz-Kriterium. Damit ist (S_{2N}) konvergent.

Schließlich gilt

$$\lim_{N\to\infty} S_{2N+1} = \lim_{N\to\infty} S_{2N} + \frac{\mathrm{i}^{2N+1}}{2N+1} = \lim_{N\to\infty} S_{2N} + \mathrm{i} \cdot \underbrace{\lim_{N\to\infty} \frac{(-1)^N}{2N+1}}_{=0} = \lim_{N\to\infty} S_{2N}.$$

Also ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n}$ konvergent. Alternativ ist die Aufgabe 34 benutzen.

(x) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n := \frac{(2n)!}{(3n)^n n!}$. Offenbar ist $a_n > 0$ und es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(2(n+1))!}{(3(n+1))^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{(3n)^n n!}{(2n)!} = \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{(3n)^n}{(3(n+1))^{n+1}} \\
&= \frac{(2n+2)(2n+1)}{n+1} \cdot \frac{(3n)^n}{(3(n+1))^{n+1}} = \frac{2(n+1)(2n+1)}{n+1} \cdot \frac{1}{3n} \cdot \frac{(3n)^{n+1}}{(3(n+1))^{n+1}} \\
&= \frac{4}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{4}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Ferner ist

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{4}{3} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}_{=\frac{1}{e}} = \frac{4}{3e}.$$

Da $e > 2$ ist $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \frac{2}{3} < 1$. Mit dem Quotientenkriterium, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(3n)^n n!}$ (absolut) konvergent ist.

(xi) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n = \frac{(\sqrt{n}-2)^2}{n^2 + \sqrt{n^4+1}} = \frac{n(1-\frac{2}{\sqrt{n}})^2}{n^2 + n^2\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}} = \frac{(1-\frac{2}{\sqrt{n}})^2}{n\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}\right)}.$$

Für die Klammer im Nenner gilt $1 + \sqrt{1+\frac{1}{n^4}} \leq 1 + \sqrt{2} < 3$. Für den Zähler gilt ab $n \geq 9$

$$\left(1 - \frac{2}{\sqrt{n}}\right)^2 = 4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq 4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{9}}\right) = \frac{2}{3}.$$

Deshalb folgt $a_n \geq \frac{2}{9}\frac{1}{n}$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent. Folglich ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{n}-2)^2}{n^2+\sqrt{n^4+1}}$ divergent nach dem Minorantenkriterium.

(xii) Wir zeigen vorbereitend, dass

$$\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}$$

für alle $n \geq 3$. Sei dazu $n \geq 3$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned} \sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n} \quad &\Leftrightarrow \quad n > \left(\sqrt[n+1]{n+1}\right)^n = \sqrt[n+1]{(n+1)^n} \\ &\Leftrightarrow \quad n^{n+1} > (n+1)^n \\ &\Leftrightarrow \quad n > \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n . \end{aligned}$$

Es gilt auch $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e < 3$ und $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend. Damit gilt tatsächlich

$$n \geq 3 > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

für alle $n \geq 3$.

Die Reihenglieder $a_n = \frac{\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1}}{n}$ sind nach Obigem ab $n = 3$ positiv. Da es bei Konvergenzfragen auf endlich viele Reihenglieder nicht ankommt, ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann konvergent, wenn sie absolut konvergent ist bzw. wenn $\sum_{n=3}^{\infty} a_n$ konvergent ist.

Für die N-te Partialsumme S_N der letzten Reihe gilt

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=3}^{N} \frac{\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1}}{n} = \sum_{n=3}^{N} \frac{\sqrt[n]{n}}{n} - \sum_{n=3}^{N} \frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{n} \leq \sum_{n=3}^{N} \frac{\sqrt[n]{n}}{n} - \sum_{n=3}^{N} \frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{n+1} \\ &\overset{\text{Indexshift}}{=} \sum_{n=3}^{N} \frac{\sqrt[n]{n}}{n} - \sum_{n=4}^{N+1} \frac{\sqrt[n]{n}}{n} \overset{\text{Teleskopsumme}}{=} \frac{\sqrt[3]{3}}{3} - \frac{\sqrt[N+1]{N+1}}{N+1} \leq \frac{\sqrt[3]{3}}{3}. \end{aligned}$$

Also ist (S_N) nach oben beschränkt. Die Reihe ist $\sum_{n=3}^{\infty} a_n$ konvergent, weil (S_N) ist monoton und beschränkt. Also ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1}}{n}$ (absolut) konvergent.

□