Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Michal Jex

WS2017/18
11.12.2017

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

8. Übungsblatt

Definitionen

Potenzreihen

Sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Eine Potenzreihe um z_0 hat die Form $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, wobei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ ist. Diese heißen Koeffizienten der Potenzreihe und z_0 heißt Entwicklungspunkt.
Wir nennen eine Potenzreihe reell, falls $x_0 \in \mathbb{R}$ und alle a_n reell sind. Betrachten wir reelle Potenzreihen mit Entwicklungspunkt x_0 und wollen reelle Zahlen einsetzen, so schreiben wir häufig $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$.

Der Konvergenzradius

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ eine Potenzreihe. Man setzt

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \text{Formel von Cauchy} - \text{Hadamard}$$

mit der Konvention $\frac{1}{0} = \infty$ und $\frac{1}{\infty} = 0$. Die Zahl R heißt Konvergenzradius der Potenzreihe.

Aufgabe 43:

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ eine Potenzreihe. Beweisen Sie die folgende Aussagen:

(a) Die Potenzreihe konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| < R$.

(b) Die Potenzreihe divergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| > R$.

Aufgabe 44: Konvergenzradius über Quotienten

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ eine Potenzreihe mit $a_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Gilt $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \to \alpha$, wobei $0 \leq \alpha \leq \infty$, so ist der Konvergenzradius $R = \frac{1}{\alpha}$.

Aufgabe 45:

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ eine Potenzreihe. Beweisen Sie die folgende Aussagen:

(i) Wenn die Potenzreihe für ein $z_1 \in \mathbb{C}$ konvergiert, dann konvergiert sie absolut auch für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| < |z_1-z_0|$,

(ii) Wenn die Potenzreihe für ein $z_1 \in \mathbb{C}$ konvergiert, dann gilt für den Konvergenzradius $R \geq |z_1-z_0|$,

(iii) Wenn die Potenzreihe für ein $z_2 \in \mathbb{C}$ divergiert, dann divergiert sie auch für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| > |z_2-z_0|$,

(iv) Wenn die Potenzreihe für ein $z_2 \in \mathbb{C}$ divergiert, dann gilt für den Konvergenzradius $R \leq |z_2-z_0|$,

— Bitte wenden! —

Aufgabe 46:
Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die folgenden Potenzreihen? Bestimmen Sie im Falle der Konvergenz jeweils den Reihenwert.

(i) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$,

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$.

Hinweis: Benutzen Sie ein Cauchy-Produkt in der richtigen Form.

Aufgabe 47:
Für welche $z \in \mathbb{C}$ bzw. $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Potenzreihen?

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) z^n$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{n(1+(-1)^n)} z^{2n}$

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}$

(iv) $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$

(v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+\sqrt{n}}$

(vi) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) z^{2n}$

(vii) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{(n^2)}$

(viii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} (z-2\mathrm{i})^n$

(ix) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2} x^n$

(x) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} z^n$

Bemerkung: Die Definitonen und die Aufgaben 43 bis 45 übertragen Sie auch zu Banachsräumigen Potenzreihen, d.h. $a_n \in V$ wobei V ein Banachsraum ist.

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgabe 43, 44 und 45 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.