**Institut für Analysis**
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Michal Jex

WS2017/18
15.12.2017

# Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

## Lösungsvorschläge zum 8. Übungsblatt

### Aufgabe 43:

(a) Wir benutzen das Wurzelkriterium mit der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. Dann haben wir

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n(z-z_0)^n} < 1 \Leftarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \text{ konvergiert absolut}.$$

Es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z-z_0|^n} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}|z-z_0| \leq \frac{|z-z_0|}{R} < 1.$$

weil $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = R^{-1}$.

(b) Wir zeigen, dass $a_n(z-z_0)^n$ keine Nullfolge ist. Es gilt

$$\sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|} = \sqrt[n]{|a_n|}\sqrt[n]{(|z-z_0|)^n} = |z-z_0|\sqrt[n]{|a_n|}.$$

Dann haben wir

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|} = |z-z_0| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|z-z_0|}{R} > 1$$

und die Folge $|a_n(z-z_0)^n|$ kann nicht Nullfolge sein, weil $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|} > 1$.

□

### Aufgabe 44:

Wir benutzen das Quotientenkriterium mit der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. Wir können schreiben

$$\frac{|a_{n+1}(z-z_0)^{n+1}|}{|a_n(z-z_0)^n|} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|z-z_0|.$$

Es gilt, dass

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|z-z_0| < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_n(z-z_0)^n| \text{ konvergiert},$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|z-z_0| > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \text{ divergiert}.$$

Wir haben auch, dass die Folge $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ das Grenzwert $\alpha$ hat und deshalb

$$\alpha|z-z_0|<1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}|a_n(z-z_0)^n| \text{ konvergiert},$$
$$\alpha|z-z_0|>1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \text{ divergiert}.$$

Wir beweisen, dass $\alpha = \frac{1}{R}$ beim Widerspruch. Sei $R \neq \frac{1}{\alpha}$, dann

$$|z-z_0|<\frac{1}{\alpha} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}|a_n(z-z_0)^n| \text{ konvergiert},$$
$$|z-z_0|>\frac{1}{\alpha} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \text{ divergiert},$$

aber es ist im Widerspruch mit die Aufgabe 43. □

### Aufgabe 45:

Wir benutzen die Aufgabe 43.

(i) Die Anteil (ii) impliziert, dass $|z_1 - z_0| \leq R$ gilt. Dann haben wir $|z-z_0| < R$ und nach dem Aufgabe 43(a) konvergiert die Potenzreihe absolut.

(ii) Nach dem Aufgabe 43(b) wissen wir, dass die Potenzreihe nur für $z \in \mathbb{C}$, $|z-z_0| \leq R$ konvergieren kann. Wenn die Potenzreihe konvergiert, muss $|z-z_0| \leq R$.

(iii) Die Anteil (iv) impliziert, dass $|z_2 - z_0| \geq R$ gilt. Dann haben wir $|z-z_0| > R$ und nach dem Aufgabe 43(b) divergiert die Potenzreihe.

(iv) Nach dem Aufgabe 43(a) wissen wir, dass die Potenzreihe nur für $z \in \mathbb{C}$, $|z-z_0| \geq R$ divergieren kann. Wenn die Potenzreihe divergiert, muss $|z-z_0| \geq R$.

□

### Aufgabe 46:

(a) Es gilt:

$$\sum_{n\geq 0}(n+1)z^n = \sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n} z^n = \sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n} z^{n-k}z^k \overset{\text{Cauchy-Produkt}}{=} \left(\sum_{n\geq 0} z^n\right)\cdot\left(\sum_{k\geq 0} z^k\right)$$

Der Konvergenzradius $\rho$ der geometrischen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ist $\rho = 1$. Nach Vorlesung konvergiert $\sum_{n\geq 0}(n+1)z^n$ für $|z|<1$ absolut und es gilt $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n = \frac{1}{(1-z)^2}$.

Für $|z| \geq 1$ gilt:

$$|(n+1)z^n| = (n+1)\,|z|^n \geq n+1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Damit ist bildet $((n+1)z^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ keine Nullfolge und $\sum_{n\geq 0}(n+1)z^n$ ist divergent.

(b) Es gilt:

$$\sum_{n\geq 1} nz^n = z \cdot \sum_{n\geq 1} nz^{n-1} \overset{\text{Index-Shift}}{=} z \cdot \sum_{n\geq 0}(n+1)z^n$$

Mit Aufgabenteil (a) folgt: $\sum_{n\geq 1} nz^n$ ist für $|z| \geq 1$ divergent. Für $|z| < 1$ ist die Reihe absolut konvergent und für den Reihenwert gilt $\sum_{n\geq 1} nz^n = \frac{z}{(1-z)^2}$.

(c) Für $|z| \geq 1$ gilt:

$$\left|n^2 z^n\right| = n^2 |z|^n \geq n^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Damit bildet $(n^2 z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge und die Reihe $\sum_{n\geq 1} n^2 z^n$ ist divergent.

Aus der Vorlesung ist die folgende Summenformel bekannt:

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \Leftrightarrow 2\sum_{k=0}^{n} k = n^2 + n \Leftrightarrow n^2 = 2\left(\sum_{k=0}^{n} k\right) - n$$

Damit folgt:

$$\sum_{n\geq 1} n^2 z^n = \sum_{n\geq 0} z^n \left(2\left(\sum_{k=0}^{n} k\right) - n\right) = 2\sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n}(z^{n-k})(kz^k) - \sum_{n\geq 0} nz^n$$

Für $|z| < 1$ folgt mit Aufgabenteil (b), dass $\sum_{n\geq 1} n^2 z^n$ absolut konvergent ist und der Reihenwert

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1} n^2 z^n &= 2\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} kz^k\right) - \sum_{n=0}^{\infty} nz^n = 2 \cdot \frac{1}{1-z} \cdot \frac{z}{(1-z)^2} - \frac{z}{(1-z)^2} \\
&= \frac{z}{(1-z)^2} \cdot \left(\frac{2}{1-z} - 1\right) = \frac{z}{(1-z)^2} \cdot \frac{1+z}{1-z} = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}
\end{aligned}$$

beträgt.

□

## Aufgabe 47:

(i) Sei $(a_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$. Es gilt

$$1 \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n} 1} = \sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

Also ist $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. Nach der Formel von Cauchy-Hadamard ist der Konvergenzradius $R = \frac{1}{1} = 1$. Nach dem Aufgabe 43 ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ absolut konvergent für $|z| < 1$ und divergent für $|z| > 1$.

Für $|z| = 1$ ist

$$|a_n z^n| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

keine Nullfolge. Also divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$.

(ii) Die Reihe hat die Form $\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ mit

$$a_n = \begin{cases} e^{4k} & \text{für } n = 4k, \\ 0 & \text{für } n = 4k+1, \\ 1 & \text{für } n = 4k+2, \\ 0 & \text{für } n = 4k+3 \end{cases}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Es ist $\sqrt[4k]{|a_{4k}|} = e$, $\sqrt[4k+1]{|a_{4k+1}|} = 0$, $\sqrt[4k+2]{|a_{4k+2}|} = 1$ und $\sqrt[4k+3]{|a_{4k+3}|} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und folglich $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = e$.

Nach der Formel von Cauchy-Hadamard ist ist $R = \frac{1}{e}$ der Konvergenzradius von $\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$. Nach dem Aufgabe 43 des Skriptes ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ absolut konvergent für $|z| < \frac{1}{e}$ und divergent für $|z| > \frac{1}{e}$.

Für $|z| = e^{-1}$ gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$\left|a_{4k} z^{4k}\right| = e^{4k} |z|^{4k} = e^{4n} e^{-4n} = 1.$$

Also ist $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge und die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ divergent.

(iii) Die Reihe hat die Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 2k, \\ \frac{1}{(2k+1)!} & \text{für } n = 2k+1 \end{cases}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Also ist

$$0 \leq |a_n z^n| \leq \frac{|z|^n}{n!}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Da die Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ absolut konvergent ist für alle $z \in \mathbb{C}$, ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ absolut konvergent für alle $z \in \mathbb{C}$ nach dem Majorantenkriterium.

(iv) Man kann zeigen, dass

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$$

Nach der Formel von Cauchy-Hadamard ist $R = \frac{1}{\infty} = 0$ der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$. Nach dem Aufgabe 43, ist $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$ genau für $z = 0$ konvergent (in diesem Fall ist sie natürlich absolut konvergent).

(v) Sei $(a_n) = \left(\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)$. Es gilt

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{n+1+\sqrt{n+1}}{n+\sqrt{n}} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{1-\frac{1}{n+1}+\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{n}}} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

Nach dem Aufgabe 44 ist $R = 1$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. Nach dem Aufgabe 43, ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ also für $|x| < 1$ (absolut) konvergent und für $|x| > 1$ divergent.

Es gilt $a_n \geq \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Folglich ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ divergent für $x = 1$ nach dem Minorantenkriterium.

Da $(a_n)$ eine streng monoton fallende Nullfolge ist, ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ konvergent für $x = -1$ nach dem Leibnizkriterium.

(vi) Definiere $w := \frac{z^2}{4}$ und $a_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$. Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) z^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n w^n.$$

Ferner ist

$$1 \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n} 1} = \sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

Also ist $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. Nach der Formel von Cauchy-Hadamard ist der Konvergenzradius $R = \frac{1}{1} = 1$. Nach dem Aufgabe 43 ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n w^n$ absolut konvergent für $|w| < 1$ bzw. $|z| < 2$ und divergent für $|w| > 1$ bzw. $|z| > 2$.

Für $|w| = 1$ ist

$$|a_n w^n| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

keine Nullfolge. Also divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ für $|w| = 2$.

(vii) Die Reihe hat die Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit

$$a_n = \begin{cases} 2^m & \text{für } n = m^2, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Folglich ist

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{m\to\infty} \sqrt[m^2]{|a_{m^2}|} = \limsup_{m\to\infty} \sqrt[m^2]{2^m} = \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{2} = 1.$$

Nach der Formel von Cauchy-Hadamard ist der Konvergenzradius $R = \frac{1}{1} = 1$. Nach dem Aufgabe 43 ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ absolut konvergent für $|z| < 1$ und divergent für $|z| > 1$.

Für $|z| = 1$ ist $(|a_n z^n|)_{n\in\mathbb{N}} = (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge. Deshalb ist $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ divergent.

(viii) Die Reihe hat die Form $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ mit $z_0 = 2\mathrm{i}$ und $a_n = \frac{1}{n^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Nach der Formel von Cauchy-Hadamard ist der Konvergenzradius $R = \frac{1}{0} = \infty$. Nach dem Aufgabe 43 ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ (absolut) konvergent für alle $z \in \mathbb{C}$.

(ix) Sei $(a_n)_{n\geq 2} = \left(\frac{2n+1}{(n-1)^2}\right)_{n\geq 2}$. Es gilt

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{2n+1}{(n-1)^2} \cdot \frac{(n+1-1)^2}{2(n+1)+1} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2} \cdot \frac{1 + \frac{1}{2n}}{1 + \frac{3}{2n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

Nach dem Aufgabe 44 ist $R = 1$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. Nach dem Aufgabe 43, ist die Potenzreihe also für $|x| < 1$ (absolut) konvergent und für $|x| > 1$ divergent.

Es gilt

$$a_n = \frac{2n+1}{(n-1)^2} \geq \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$$

für alle $n \geq 2$. Folglich ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ divergent für $x = 1$ nach dem Minorantenkriterium.

Für alle $n \geq 2$ gilt

$$a_n = \frac{2n+1}{(n-1)^2} = \frac{2(n-1)+3}{(n-1)^2} = \frac{2}{n-1} + \frac{3}{(n-1)^2} \geq \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} = \frac{2(n+1)+1}{n^2} = a_{n+1}.$$

Ferner ist

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2} = 0.$$

Also ist $\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$ konvergent für $x = -1$ nach dem Leibnizkriterium.

(x) Sei $(a_n) = \left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right)$. Es gilt $1 \leq n! \leq n^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Folglich ist

$$1 = \sqrt[n]{\frac{n}{n}} = \sqrt[n]{\frac{n}{\sqrt[n]{n^n}}} \leq \underbrace{\sqrt[n]{\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}}}_{=\sqrt[n]{|a_n|}} \leq \frac{\sqrt[n]{n}}{1} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

Also ist $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. Nach der Formel von Cauchy-Hadamard ist der Konvergenzradius $R = \frac{1}{1} = 1$. Nach dem Aufgabe 43 ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ absolut konvergent für $|z| < 1$ und divergent für $|z| > 1$.

Für $|z| = 1$ ist

$$|a_n z^n| = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{n^n}} = 1$$

keine Nullfolge. Also divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ für $|z| = 1$.