Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Michal Jex

WS2017/18
22.12.2017

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 9. Übungsblatt

Aufgabe 48:

(a) Es gilt

$$e^{\mathrm{i}\varphi}-e^{\mathrm{i}\psi}=e^{\mathrm{i}\frac{\varphi+\psi}{2}}\cdot\left(e^{\mathrm{i}\varphi-\frac{\varphi+\psi}{2}}-e^{\mathrm{i}\psi-\frac{\varphi+\psi}{2}}\right)=e^{\mathrm{i}\frac{\varphi+\psi}{2}}\cdot\left(e^{\mathrm{i}\frac{\varphi-\psi}{2}}-e^{-\mathrm{i}\frac{\varphi-\psi}{2}}\right)=2\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\frac{\varphi+\psi}{2}}\cdot\sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right).$$

Deshalb ist tatsächlich $\left|e^{\mathrm{i}\varphi}-e^{\mathrm{i}\psi}\right|=\left|2e^{\mathrm{i}\frac{\varphi+\psi}{2}}\cdot\sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)\right|=2\left|\sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)\right|$.

(b) Die n-ten Einheitswurzeln sind durch

$$w_n:=w_0:=1=e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}\cdot 0},\ w_1:=e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}\cdot 1},\ \ldots,\ w_{n-1}:=e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}\cdot(n-1)}$$

gegeben. Nach Teilaufgabe (a) gilt

$$|w_{k+1}-w_k|=\left|e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}\cdot(k+1)}-e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}\cdot k}\right|=2\left|\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right|$$

für alle $k\in\{0,\ldots,n-1\}$. Also bilden w_k mit $k\in\{0,\ldots,n-1\}$ ein reguläres n-Eck vom Umfang

$$L_n=|w_{n-1}-w_0|+\sum_{k=0}^{n-2}|w_{k+1}-w_k|=2n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

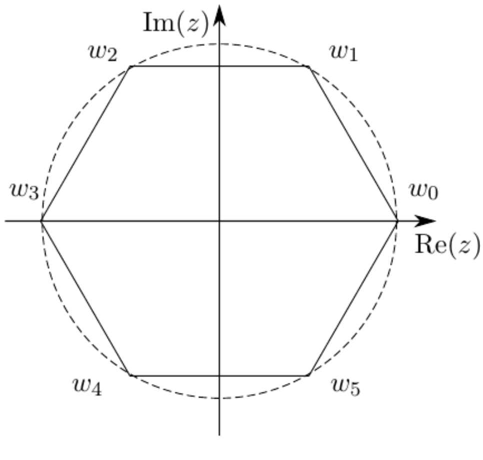

Abbildung 1: Sechste Einheitswurzeln

(c) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty}L_n=\lim_{n\to\infty}2n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}2\pi\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}}=\lim_{x\to 0}2\pi\frac{\sin(x)}{x}=2\pi.$$

(d) Das Ergebnis lässt sich wie folgt verstehen: Das von den w_k ($k \in \{0, \dots, n_1\}$) aufgespannte reguläre n-Eck approximiert immer besser den Einheitskreis $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$. Der Umfang der Rechtecke approximiert den Umfang der $\mathbb{S}^1$. Eine Skizze für $n = 6$ ist in der Abbildung (1) zu finden.

□

Aufgabe 49:

(a) Wir definieren die Funktion in $x = 0$ als $f(0) = \lim_{x \to 0_+} f(x) = 0$. Das Definition des Limes ist

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x > 0 : |x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \epsilon .$$

Das ist äquivalent zum Stetigkeit von Funktion f in $x = 0$.

(b) Wir definieren die Funktion in $x = 0$ als $f(0) = \lim_{x \to 0_+} f(x) = \frac{1}{3}$. Das Definition des Limes ist

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x > 0 : |x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \epsilon .$$

Das ist äquivalent zum Stetigkeit von Funktion f in $x = 0$.

□

Aufgabe 50:

(a) Wir müssen beweisen, dass $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in \mathbb{R} : |x - y| < \delta \Rightarrow ||x| - |y|| < \epsilon$. Wir zeigen, dass Absolutbetrag stetig für $x \in [0, \infty)$ und $x \in (-\infty, 0]$ ist. Für $x \in [0, \infty)$ und $x \in (-\infty, 0]$ ist Absolutbetrag stetig, weil $||x| - |y|| \leq |x - y|$ gilt. Dann ist Absolutbetrag stetig für $x \in \mathbb{R}$.

(b) Komposition von zwei stetigen Funktionen ist stetig.

□

Aufgabe 51: Wir müssen beweisen, dass $f(x)$ in $x = 0$ stetig ist. Wir haben die Ungleichung

$$|x^2 + 4x| < \epsilon . \tag{1}$$

Das Funktion $x^2 + 4x$ ist negativ für $x \in (-4, 0)$, weil $x^2 + 4x = 0$ für $x = 0$ und $x = -4$. Dann können wir die Ungleichung (1) schreiben als

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + \epsilon > 0 \,, &\quad x \in (-4, 0) \,, \\ x^2 + 4x - \epsilon < 0 \,, &\quad x \in \mathbb{R} \setminus (-4, 0) \,. \end{aligned}$$

Die erste Ungleichung ist wahr, wenn $x \in \mathbb{R} \setminus \left[-2 - \sqrt{4 - \epsilon}, -2 + \sqrt{4 - \epsilon}\right]$ und die andere Ungleichung ist wahr, wenn $x \in \left(-2 - \sqrt{4 + \epsilon}, -2 + \sqrt{4 + \epsilon}\right)$. Zusammen haben wir, dass die Ungleichung (1) wahr für $x \in (-2 + \sqrt{4 - \epsilon}, -2 + \sqrt{4 + \epsilon})$ ist. Wir definieren $\delta := \min\{| - 2 +$

$\sqrt{4-\epsilon}|, |-2+\sqrt{4+\epsilon}|\} = -2+\sqrt{4+\epsilon}$, weil

$$\begin{aligned}
|-2+\sqrt{4-\epsilon}| &> |-2+\sqrt{4+\epsilon}|\,,\\
2-\sqrt{4-\epsilon} &> -2+\sqrt{4+\epsilon}\,,\\
4 &> \sqrt{4+\epsilon}+\sqrt{4-\epsilon}\,,\\
4(\sqrt{4+\epsilon}-\sqrt{4-\epsilon}) &> (\sqrt{4+\epsilon}+\sqrt{4-\epsilon})(\sqrt{4+\epsilon}-\sqrt{4-\epsilon})\,,\\
4(\sqrt{4+\epsilon}-\sqrt{4-\epsilon}) &> 2\epsilon\,,\\
\sqrt{4+\epsilon} &> \frac{\epsilon}{2}+\sqrt{4-\epsilon}\,,\\
4+\epsilon &> \left(\frac{\epsilon}{2}+\sqrt{4-\epsilon}\right)^2\,,\\
4+\epsilon &> \frac{\epsilon^2}{4}+4-\epsilon+\epsilon\sqrt{4-\epsilon}\,,\\
2\epsilon &> \frac{\epsilon^2}{4}+\epsilon\sqrt{4-\epsilon}\,,\\
2 &> \frac{\epsilon}{4}+\sqrt{4-\epsilon}\,,\\
2-\frac{\epsilon}{4} &> \sqrt{4-\epsilon}\,,\\
4-\epsilon+\frac{\epsilon^2}{16} &> 4-\epsilon\,,\\
\frac{\epsilon^2}{16} &> 0\,,
\end{aligned}$$

wo wir $0<\epsilon<4$ benutzt haben. □

Aufgabe 52:

Wir definieren die stetige Funktion $F(x) = f(x) - g(x)$. Dann müssen wir zeigen, dass $c \in [a, b]$ existiert so, dass $F(c) = 0$ aber dass das Zwischenwertsatz gibt. □

Aufgabe 53:

(i) Wir benutzen, dass $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$ und $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
\sin(2x) = 2\sin x\cos x &= \frac{2\sin x\cos x}{1} = \frac{2\sin x\cos x}{\sin^2 x+\cos^2 x}\\
&= \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}\frac{2\sin x\cos x}{\sin^2 x+\cos^2 x} = \frac{2\frac{\sin x}{\cos x}}{1+\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)} = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}\,.
\end{aligned}$$

(ii) Wir benutzen, dass $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ und $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
\cos(2x) = \cos^2 x-\sin^2 x &= \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{1} = \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x}\\
&= \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x} = \frac{1-\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)}{1+\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)} = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}\,.
\end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 54:
Wir benutzen, dass $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ und $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$. Wir wissen auch, dass $\sin x = -\sin(-x)$ und $\cos x = \cos(-x)$, weil $\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = -\frac{e^{-ix}-e^{ix}}{2i}$ und $\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{e^{-ix}+e^{ix}}{2}$ gelten.

(i) $\sin x \cos y + \cos x \sin y = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2} + \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i} = \frac{1}{4i}(2e^{i(x+y)} - 2e^{-i(x+y)}) = \sin(x+y)$

(ii) $\sin x \cos y - \cos x \sin y = \sin x \cos(-y) + \cos x \sin(-y) = \sin(x-y)$

(iii) $\cos x \cos y - \sin x \sin y = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2} - \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i} = \frac{1}{4}[(e^{ix}+e^{-ix})(e^{iy}+e^{-iy}) + (e^{ix}-e^{-ix})(e^{iy}-e^{-iy})] = \frac{2e^{i(x+y)}+2e^{-i(x+y)}}{4} = \frac{e^{i(x+y)}+e^{-i(x+y)}}{2} = \cos(x+y)$

(iv) $\cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos x \cos(-y) - \sin x \sin(-y) = \cos(x-y)$

(v) $\sin(2x) = \sin(x+x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x$

(vi) $\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$

(vii) Wir zeigen die äquivalente Gleichung, d.h., $2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - \cos x$.
$1 - \cos(x) = 1 - \left[\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right] = \left[\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right] - \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$

(viii) Wir zeigen die äquivalente Gleichung, d.h., $2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 + \cos x$.
$1 + \cos(x) = 1 + \left[\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right] = \left[\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right] + \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$

(ix) $\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \left|\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\right| = \frac{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}{\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|} = \frac{\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}} = \sqrt{\frac{\frac{1-\cos x}{2}}{\frac{1+\cos x}{2}}} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

(x) Wir definieren $a := \frac{x+y}{2}$ und $b := \frac{x-y}{2}$. Dann
$\sin x + \sin y = \sin(a+b) + \sin(a-b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b + \sin a \cos b - \cos a \sin b = 2 \sin a \cos b = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

(xi) $\sin x - \sin y = \sin x + \sin(-y) = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$

(xii) Wir definieren $a := \frac{x+y}{2}$ und $b := \frac{x-y}{2}$. Dann
$\cos x + \cos y = \cos(a+b) + \cos(a-b) = (\cos a \cos b - \sin a \sin b) + (\cos a \cos b + \sin a \sin b) = 2\cos a \cos b = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

(xiii) Wir definieren $a := \frac{x+y}{2}$ und $b := \frac{x-y}{2}$. Dann
$\cos x - \cos y = \cos(a+b) - \cos(a-b) = (\cos a \cos b - \sin a \sin b) - (\cos a \cos b + \sin a \sin b) = -2\sin a \sin b = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

(xiv) Wir benutzen, dass $\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ und $\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$.
$(\sinh x + \cosh x)^n = \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2} + \frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^n = (e^x)^n = e^{nx} = \frac{e^{nx}}{2} + \frac{e^{nx}}{2}$
$\frac{e^{nx}}{2} + \frac{e^{nx}}{2} = \frac{e^{nx}}{2} + \frac{e^{-nx}}{2} - \frac{e^{-nx}}{2} + \frac{e^{nx}}{2} = \sinh(nx) + \cosh(nx)$

$\square$

http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm1phys2017w/