**Institut für Analysis**
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Michal Jex

WS2017/18
8.1.2018

# Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

## 10. Übungsblatt

**Aufgabe 55:**

(a) Sei $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ eine gleichmäßige stetige Funktion. Zeigen Sie, dass $f$ beschränkt ist.

(b) Sei $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Finden Sie ein Beispiel so, dass $f$ unbeschränkt ist.

(c) Sei $I$ abgeschlossenes Interval und sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktion. Beweisen Sie, dass das Bild $f(I)$ ein abgeschlossenes Interval ist.
**Hinweis:** Existieren ein Maximum und Minimum des Bildes $I$ unter $f$?

**Aufgabe 56:**
Zeigen Sie die folgende:

(a) $(c)' = 0$ mit $c \in \mathbb{C}$,

(b) $(x^n)' = nx^{n-1}$ mit $n \in \mathbb{N}_0$,

(c) $(x^{-n})' = -nx^{-(n+1)}$ mit $n \in \mathbb{N}$,

(d) $(\exp(cx))' = c\exp(cx)$ mit $c \in \mathbb{C}$,

(e) $(\sin x)' = \cos x$,

(f) $(\cos x)' = -\sin x$,

(g) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$,

(h) $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$,

(i) $(\sinh x)' = \cosh x$,

(j) $(\cosh x)' = \sinh x$,

**Aufgabe 57:**
Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ differenzierbare Funktionen mit $f(x_0) = g(x_0) = 0$ und $g'(x_0) \neq 0$. Dann gilt

$$\lim_{x \to x_0, x \neq x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

**Aufgabe 58:**
Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ differenzierbare Funktionen. Beweisen Sie die folgende Gleichungen

(a) $(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

(b) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,

(c) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ mit $g(x) \neq 0$.

**— Bitte wenden! —**

**Aufgabe 59:**
Untersuchen Sie

(i) die Funktionenfolge $(f_n)$ mit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+n^2x^4}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$,
(ii) die Funktionenfolge $(f_n)$ mit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$ für alle $x \in \mathbb{R}_0^+$ und alle $n \in \mathbb{N}$,
(iii) die Funktionenfolge $(f_n)$ mit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f_n(x) = \frac{n^2x}{1+n^5x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$,
(iv) die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ mit $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g_n(x) = e^{-n(1+x+x^2)}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$,
(v) die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ mit $g_n : (-1,1] \to \mathbb{R}$ und $g_n(x) = x^n(1-x)$ für alle $x \in (-1,1]$ und alle $n \in \mathbb{N}$,
(vi) die Funktionenfolge $(h_n)$ mit $h_n : [a,1] \to \mathbb{R}$ $h_n(x) = \sqrt[n]{n^2x}$ für alle $x \in [a,1]$ und alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $0 \le a < 1$ fest ist,

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

**Aufgabe 60:**
Bestimmen Sie jeweils eine Konstante $y_0$ so, dass die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf ihrem ganzen Definitionsbereich $D$ stetig ist.

(i) $D = [0,1]$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x^2-4)(x-1)} & \text{für } x \in D \setminus \{1\}, \\ y_0 & \text{für } x = 1. \end{cases}$

(ii) $D = (0,\infty)$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x^r-1}{x-1} & \text{für } x \in D \setminus \{1\}, \\ y_0 & \text{für } x = 1, \end{cases}$ für ein festes $r \in \mathbb{Q}$.

(iii) $D = [0,\pi]$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x\sin(x)}{\cos(x)-1} & \text{für } x \in D \setminus \{0\}, \\ y_0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

**Wir wünschen Ihnen erholsame Weihnachtsfeiertage und ein gutes neues Jahr 2018!**


**Hinweis:** In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgabe 55, 56 und 57 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.