**Institut für Analysis**
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Michal Jex

WS2017/18
12.12.2018

# Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

## Lösungsvorschläge zum 10. Übungsblatt

### Aufgabe 55:

(a) Wir beweisen diese Ausage mit Widerspruch. Sei $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ unbeschränkt und gleichmäßig stetig. Dann existiert $(x_n)_n$ so, dass $|f(x_n)|\to\infty$ als $n\to\infty$ und $\exists(x_{n_k})_k, x_{n_k}\to x_0\in[0,1]$. Die Funktion $f$ ist gleichmäßig stetig, d.h.

$$\forall\epsilon>0\forall y\in(0,1)\exists\delta>0\forall x:|x-y|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\epsilon\,.$$

Wir nehmen $\epsilon=1$, $x=x_n$ und $y\in(0,1)$ so, dass $|x_0-y|<\frac{\delta}{2}$ und $|f(y)|<\infty$ gelten. Dann $|f(x_n)-f(y)|<1$ wenn $|x_n-x_0|<\frac{\delta}{2}$ weil $|x_n-y|=|x_n-x_0+x_0-y|<\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}<\delta$ für fast alle $n$ aber $|f(x_n)|=|f(x_n)-f(y)+f(y)|\leq|f(x_n)|=|f(x_n)-f(y)|+|f(y)|<1+|f(y)|$ und es ist widerspruch mit $|f(x_n)|\to\infty$ als $n\to\infty$.

(b) Wir nehmen die Funktion $f(x)=\frac{1}{x}$. Es ist stetig im $y\in(0,1)$, weil $\forall\epsilon>0\forall x\in(0,1)$ : $|x-y|<\frac{\epsilon y^2}{1+\epsilon y}\Rightarrow\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|<\epsilon$ aber $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}=\infty$.

(c) Aus Vorlesung wissen wir, dass das Maximum $M$ und Minimum $m$ des Bildes $I$ unter $f$ existiert, d.h. $\exists a,b\in I:f(a)=m,f(b)=M$. Entweder $m=M$ gilt oder $M>m$. Wenn $m=M$, dann ist $f$ eine konstante Funktion und wir sind fertig. Wenn $M>m$ gilt, dann nehmen wir Neues Interval $J=[\min\{a,b\},\max\{a,b\}]\subset I$ und wir zeigen, dass $\forall\lambda\in(m,M)\exists x\in J:f(x)=\lambda$ existiert. Wir benutzen die Aufgabe 52 mit $g(x)=\lambda$. Andere Moglichkeit ist die Funktion $g(x)=f(x)-\lambda$ zu definieren und das Zwischenwertsatz mit $g(x)$ zu benutzen.

□

### Aufgabe 56:

Wir schreiben den Definition des Derivation zum jeden Teil als

(a) $\lim_{x\to x_0}\frac{c-c}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{0}{x-x_0}=0$,

(b) $\lim_{x\to x_0}\frac{x^n-x_0^n}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)\sum_{j=0}^{n-1}x^{n-1-j}x_0^j}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\sum_{j=0}^{n-1}x^{n-1-j}x_0^j=\sum_{j=0}^{n-1}x_0^{n-1}=$
$=x_0^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}1=nx_0^{n-1}$.

(c) $\lim_{x\to x_0}\frac{x^{-n}-x_0^{-n}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{x_0^n-x^n}{x^nx_0^n}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x_0-x)\sum_{j=0}^{n-1}x_0^{n-1-j}x^j}{(x-x_0)x^nx_0^n}=-\lim_{x\to x_0}\frac{\sum_{j=0}^{n-1}x_0^{n-1-j}x^j}{x^nx_0^n}=$
$=-\frac{\sum_{j=0}^{n-1}x_0^{n-1}}{x_0^{2n}}=-n\frac{x_0^{n-1}}{x_0^{2n}}=-nx^{-n-1}$.

(d) Aus dem Vorlesung haben wir $\left|\exp(z) - \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}\right| \le 2\frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!}$, $\forall |z| \le 1 + \frac{N}{2}$ und $\forall N \in \mathbb{N}_0$. Es gilt $|\exp(cx) - 1 - cx| \le |cx|^2$ und auch $\left|\frac{\exp(cx)-1-cx}{x}\right| = \left|\frac{\exp(cx)-1}{x} - c\right| \le |c|^2|x|$ als $x \to 0$ und deshalb haben wir $\lim_{x\to 0} \frac{\exp(cx)-1}{\epsilon} = c$.
$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{\exp(c(x_0+\epsilon))-\exp(cx_0)}{\epsilon} = \exp(cx_0) \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\exp(c\epsilon)-1}{\epsilon} = c\exp(cx_0)$.

(e) Wir zeigen dieses Gleichung zusammen mit (f).

(f) Wir können $i(\cos(x) + i\sin(x)) = i\exp(ix) = \frac{d}{dx}\exp(ix) = \frac{d}{dx}\cos(x) + i\frac{d}{dx}\sin(x)$ schreiben deshalb haben wir $i\cos(x) = i\frac{d}{dx}\sin(x)$ und $\frac{d}{dx}\cos(x) = i^2\sin(x)$.

(g) $(\tan x)' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{(\sin(x))'\cos(x) - (\sin(x)\cos(x))'}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2 x}$.

(h) $(\cot x)' = \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)' = \frac{(\sin(x)\cos(x))' - (\sin(x))'\cos(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

(i) $(\sinh x)' = \left(\frac{\exp(x)-\exp(-x)}{2}\right)' = \frac{\exp(x)+\exp(-x)}{2} = \cosh x$.

(j) $(\cosh x)' = \left(\frac{\exp(x)+\exp(-x)}{2}\right)' = \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{2} = \sinh x$.

$\square$

**Aufgabe 57:**
Wir benutzen lineare Approximation von $f(x)$ im Punkt $x_0$ als $f(x_0+\epsilon) = f(x_0) + \epsilon f'(x_0) + o(\epsilon)$. Dann haben wir

$$\lim_{x\to x_0, x\neq x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(x_0) + \epsilon f'(x_0) + o(\epsilon)}{g(x_0) + \epsilon g'(x_0) + o(\epsilon)} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f'(x_0) + \frac{o(\epsilon)}{\epsilon}}{g'(x_0) + \frac{o(\epsilon)}{\epsilon}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

wo $\frac{o(\epsilon)}{\epsilon} \to 0$ als $\epsilon \to 0$. $\square$

**Aufgabe 58:**

(a) Wir schreiben den Definition des Derivation von $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ als

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0} \frac{h(x+\epsilon) - h(x)}{\epsilon} &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\alpha f(x+\epsilon) + \beta g(x+\epsilon) - \alpha f(x) - \beta g(x)}{\epsilon} \\
&= \alpha \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon} + \beta \lim_{\epsilon\to 0} \frac{g(x+\epsilon) - g(x)}{\epsilon} \\
&= \alpha f'(x) + \beta g'(x)\,.
\end{aligned}$$

(b) Wir schreiben den Definition des Derivation von $h(x) = f(x)g(x)$ als

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\frac{h(x+\epsilon)-h(x)}{\epsilon} &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(x+\epsilon)g(x+\epsilon)-f(x)g(x)}{\epsilon}\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(x+\epsilon)g(x+\epsilon)-f(x)g(x+\epsilon)+f(x)g(x+\epsilon)-f(x)g(x)}{\epsilon}\\
&= \lim_{\epsilon\to 0} g(x+\epsilon)\lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon}+f(x)\lim_{\epsilon\to 0}\frac{g(x+\epsilon)-g(x)}{\epsilon}\\
&= g(x)\lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon}+f(x)\lim_{\epsilon\to 0}\frac{g(x+\epsilon)-g(x)}{\epsilon}\\
&= f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\,.
\end{aligned}$$

(c) Wir schreiben den Definition des Derivation von $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ als

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\frac{h(x+\epsilon)-h(x)}{\epsilon} &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\frac{f(x+\epsilon)}{g(x+\epsilon)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{\epsilon}\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\frac{f(x+\epsilon)}{g(x+\epsilon)}-\frac{f(x)}{g(x+\epsilon)}+\frac{f(x)}{g(x+\epsilon)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{\epsilon}\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{g(x+\epsilon)}\lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon}+f(x)\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\frac{1}{g(x+\epsilon)}-\frac{1}{g(x)}}{\epsilon}\\
&= \frac{1}{g(x)}\lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon}+f(x)\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\frac{g(x)-g(x+\epsilon)}{g(x+\epsilon)g(x)}}{\epsilon}\\
&= \frac{f'(x)}{g(x)}-\frac{f(x)}{g(x)}\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{g(x+\epsilon)}\lim_{\epsilon\to 0}\frac{g(x+\epsilon)-g(x)}{\epsilon}\\
&= \frac{f'(x)}{g(x)}-\frac{f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}\,.
\end{aligned}$$

□

## Aufgabe 59:

(i) Sei $x \in \mathbb{R}$ fest. Für $x = 0$ ist $f_n(x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und deshalb $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Ist $x \neq 0$, so gilt

$$|f_n(x)| = \left|\frac{nx^2}{1+n^2x^4}\right| = \frac{nx^2}{1+n^2x^4} \le \frac{nx^2}{n^2x^4} = \frac{1}{nx^2} \to 0 \qquad (n\to\infty).$$

Also ist $f_n \to 0$ punktweise für $n \to \infty$.

Sei $\tilde{f}(y) = \frac{y}{1+y^2}$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Wir beobachten, dass $f_n(x) = \tilde{f}(nx^2)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt. Definiere $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{nx^2}{1+n^2x^4} \ge \frac{nx_n^2}{1+n^2x_n^4} = \tilde{f}(1) = \frac{1}{2}.$$

Also $\|f_n\|_\infty \not\to 0$, die Konvergenz $f_n \to 0$ ist also nicht gleichmäßig.

(ii) Sei $x \in \mathbb{R}_0^+$ fest. Für $x = 0$ ist $f_n(x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und deshalb $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Ist $x > 0$, so gilt

$$|f_n(x)| = \left|\frac{nx}{1+nx}\right| = \frac{nx}{1+nx} = 1 - \frac{1}{1+nx} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Also ist $f_n \to 1$ punktweise für $x > 0$, $n \to \infty$.

Wir haben, dass $f_n$ punktweise nach $f(0) = 0$ und $f(x) = 1$, $x > 0$ konvergiert. Sei $0 < x \le 1$. Dann gilt $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$ und $f\left(\frac{1}{n}\right) = 1$ und deshalb

$$\frac{1}{2} = \left|f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)\right| \le \sup_{x\in\mathbb{R}_0^+} |f_n(x) - f(x)| = \alpha_n$$

Also $\|f_n - f\|_\infty \not\to 0$, die Konvergenz $f_n \to f$ ist also nicht gleichmäßig.

(iii) Betrachte zunächst $F(y) = \frac{y}{1+y^2}$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Wegen $0 \le (1-|y|)^2 = 1 - 2|y| + y^2$, gilt $|F(y)| = \frac{|y|}{1+y^2} \le \frac{\frac{1+y^2}{2}}{1+y^2} = \frac{1}{2}$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Wegen

$$|f_n(x)| = \left|\frac{n^2x}{1+n^5x^2}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \left|F\left(\sqrt{n}^5 x\right)\right| \le \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{2} =: \alpha_n \to 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, konvergiert $f_n$ gleichmäßig gegen 0 für $n \to \infty$.

(iv) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$1 + x + x^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4} \ge \frac{3}{4}.$$

Da die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(\sqrt[4]{e})^3}\right)^n$$

konvergent ist und wegen

$$|g_n(x)| = e^{-n(1+x+x^2)} \le e^{-\frac{3n}{4}} = \left(\frac{1}{(\sqrt[4]{e})^3}\right)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$$

ist die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ gleichmäßig konvergent.

(v) Sei $x = 1$. Dann ist $g_n(x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und deswegen ist $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) = 0$. Ist $x < 1$, so ist $|x| < 1$ und die geometrische Reihe $\sum_{n\ge 0} x^n$ ist (absolut) konvergent. Deshalb gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n(1-x) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1-x}{1-x} = 1.$$

Damit konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ punktweise gegen $g$, wobei

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 1, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Weil $g$ nicht stetig bei 1 ist, kann die Konvergenz nicht gleichmäßig sein.

(vi) Sei zunächst $0 < a < 1$ und $x \in [a, 1]$ fest. Dann gilt

$$h_n(x) = \sqrt[n]{n^2 x} \to 1 \qquad (n \to \infty).$$

Also ist $h_n \to 1$ punktweise für $n \to \infty$.

Da für alle $x \in [a, 1]$

$$\begin{aligned} |h_n(x) - 1| &= \left|\sqrt[n]{n^2 x} - 1\right| = \left|\sqrt[n]{n^2 x} - \sqrt[n]{n^2 a} + \sqrt[n]{n^2 a} - 1\right| \\ &\leq \left|\sqrt[n]{n^2 x} - \sqrt[n]{n^2 a}\right| + \left|\sqrt[n]{n^2 a} - 1\right| \overset{x \geq a}{\equiv} \sqrt[n]{n^2 x} - \sqrt[n]{n^2 a} + 1 - \sqrt[n]{n^2 a} - 1 \\ &\overset{x \leq 1}{\leq} \sqrt[n]{n^2} - \sqrt[n]{n^2 a} + 1 - \sqrt[n]{n^2 a} =: \alpha_n \to 0 \end{aligned}$$

für $n \to \infty$, ist die Funktionenfolge $h_n$ gleichmäßig konvergent.

Sei nun $a = 0$. Für $x = 0$ gilt $h_n(x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und deshalb $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = 0$. Für $x \neq 0$ gilt, mit der gleichen Rechnung wie oben, $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = 1$. Deshalb konvergiert $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen $h$, wobei

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $x \in [0, 1]$. Weil $h$ nicht stetig bei 0 ist, kann die Konvergenz nicht gleichmäßig sein.

□

## Aufgabe 60:

(i) Da $f$ in allen $x \in D \setminus \{1\}$ stetig ist, reicht es $f(1) = y_0$ so zu wählen, dass $\lim_{x\to1} f(x) = y_0$ gilt. Für alle $x \in D \setminus \{1\}$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x^2-4)(x-1)} = \frac{1}{x-1} \cdot \left(1 + \frac{3}{(x^2-4)}\right) = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{(x^2-4)+3}{(x^2-4)} \\ &= \frac{1}{x-1} \cdot \frac{x^2-1}{(x^2-4)} = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{(x^2-4)} = \frac{x+1}{(x^2-4)}. \end{aligned}$$

Folglich muss $y_0 := \lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{x+1}{(x^2-4)} = -\frac{2}{3}$ gewählt werden.

(ii) Sei $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$. Da $f$ in allen $x \in D \setminus \{1\}$ stetig ist, reicht es $f(1) = y_0$ so zu wählen, dass $\lim_{x\to1} f(x) = y_0$ gilt. Wir behandeln zunächst den Fall $r \geq 0$ ($\Leftrightarrow p \in \mathbb{N}_0$). Sei $x \in D \setminus \{1\}$. Definiere $y := \sqrt[q]{x}$. Dann gilt mit der dritten binomischen Formel

$$f(x) = \frac{x^r - 1}{x - 1} = \frac{y^p - 1^p}{y^q - 1^q} = \frac{1^p - y^p}{1^q - y^q} = \frac{(y-1)\sum_{k=0}^{p-1} y^k}{(y-1)\sum_{k=0}^{q-1} y^k} = \frac{\sum_{k=0}^{p-1} y^k}{\sum_{k=0}^{q-1} y^k}.$$

Folglich muss

$$y_0 := \lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{\sum_{k=0}^{p-1} \sqrt[q]{x}^k}{\sum_{k=0}^{q-1} \sqrt[q]{x}^k} = \frac{\sum_{k=0}^{p-1} 1}{\sum_{k=0}^{q-1} 1} = \frac{p}{q} = r$$

gewählt werden.

Ist $r < 0$ ($\Leftrightarrow \tilde{p} := -p \in \mathbb{N}$), so gilt

$$f(x) = \frac{x^r - 1}{x - 1} = \frac{\frac{1}{\sqrt[q]{x}^{\tilde{p}}} - 1}{\sqrt[q]{x}^q - 1} = \frac{\frac{1}{y^{\tilde{p}}} - 1}{y^q - 1^q} = \frac{1}{y^{\tilde{p}}} \cdot \frac{1 - y^{\tilde{p}}}{y^q - 1^q} = -\frac{1}{y^{\tilde{p}}} \cdot \frac{y^{\tilde{p}} - 1}{y^q - 1^q} \overset{\text{s.o.}}{=} -\frac{1}{y^{\tilde{p}}} \cdot \frac{\sum_{k=0}^{\tilde{p}-1} y^k}{\sum_{k=0}^{q-1} y^k}.$$

Folglich muss auch in diesem Fall

$$y_0 := \lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} -\frac{1}{\sqrt[q]{x}^{\tilde{p}}} \cdot \frac{\sum_{k=0}^{\tilde{p}-1} \sqrt[q]{x}^k}{\sum_{k=0}^{q-1} \sqrt[q]{x}^k} = -\frac{\sum_{k=0}^{\tilde{p}-1} 1}{\sum_{k=0}^{q-1} 1} = \frac{p}{q} = r$$

gewählt werden.

(iii) Da $f$ in allen $x \in D \setminus \{0\}$ stetig ist, reicht es $f(0) = y_0$ so zu wählen, dass $\lim_{x \to 0} f(x) = y_0$ gilt. Für alle $x \in D \setminus \{0\}$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x \sin(x)}{\cos(x) - 1} = \frac{x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} - 1} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+2}}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}} \\ &\overset{\text{Index-Shift}}{=} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+2}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!} x^{2n+2}} = -\frac{x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}}{x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+2)!} x^{2n}} = -\frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+2)!} x^{2n}}. \end{aligned}$$

Da $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+2)!} x^{2n}$ beide den Konvergenzradius $R = \infty$ haben, definieren sie auf ganz $\mathbb{R}$ stetige Funktionen $x \mapsto f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$ und $x \mapsto f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+2)!} x^{2n}$. Folglich muss

$$y_0 := \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{-f_1(x)}{f_2(x)} = -\frac{f_1(0)}{f_2(0)} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$$

gewählt werden.

□