Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Michal Jex

WS2017/18
15.1.2018

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

11. Übungsblatt

Aufgabe 61:
Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ und $f(x) = x^{-m}$, $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$f'(x) = -mx^{-(m+1)}$$

gilt.
Hinweis: Benutzen Sie Produktregel mit dem Fall $m = 1$.

Aufgabe 62:
Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin(x^{-m}) & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Für welche n, m ist f eine (stetige) differenzierbare Funktion.

Aufgabe 63:
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie die folgende Aussagen:

(a) Angenommen f ist rechts differenzierbar bei a. Ist a eines Lokales Minimum von f so ist $f'_+(a) \geq 0$.

(b) Angenommen f ist differenzierbar auf dem Interval $(a, a+\epsilon)$, $\epsilon > 0$ und $f'_+(x) \geq 0$ $\forall x \in (a, a+\epsilon)$, so ist a eines Lokales Minimum von f.

Aufgabe 64:
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(x)$ konvex. Dann folgt aus Jensen

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j)\,, \tag{1}$$

wo $\lambda_j \geq 0$ und $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$. Zeigen Sie, $n \in \mathbb{N}$, die Verallgemeinerung der geometrische aritmethiche Ungleichung

$$\left(\prod_{j=1}^{n} a_j\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_j\,,$$

wo $a_j \geq 0$.
Hinweis: Benutzen (1) mit geschickte Wahl von λ_j.

Aufgabe 65:
Angenommen Zwei Autos stehen bei $t = 0$ am Ort $x_0 \in \mathbb{R}$. Seien $f_1(t)$ und $f_2(t)$ die Positionen der Autos zur Zeit t. Es gelte $\dot{f}_1(t) = \frac{df_1(t)}{dt} > \frac{df_2(t)}{dt} = \dot{f}_2(t) > 0$ für alle $t > 0$. Zeigen Sie, dann auch $f_1(t) > f_2(t)$ gilt. Was bedeutet diese Aussage physikalisch?

— Bitte wenden! —

Aufgabe 66:
Begründen Sie, warum die folgenden Funktionen f Maximum und Minimum annehmen und berechnen Sie diese

(a) $f : [-3, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$,

(b) $f : [0, 10] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -6x + (|x - 3| + 2)^2$,

(c) $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(\cos(x))$,

(d) $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2 - x + e^{-1})$,

Aufgabe 67:
Berechnen Sie die Grenzwerte

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+3)}{\ln(x)}$,

(b) $\lim_{x\to 1} \frac{1+\cos(\pi x)}{x^2-2x+1}$,

(c) $\lim_{x\to\infty} \big(\sin(\sqrt{x}) - \sin(\sqrt{x+1})\big)$,

(d) $\lim_{x\to\pi} \frac{\sin(\sin(x))}{x-\pi}$,

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$,

(f) $\lim_{x\to\infty} \left(x\left(\ln\left(1 + \sqrt{1+x^2}\right) - \ln(x)\right)\right)$.

Hinweis: Beim (a),(b),(d) und (e) benutzen Sie die Regel von de l'Hospital.

Übungsklausur:

- Die Übungsklausur findet am *Samstag, den 27. Januar 2017*, von *10:00 bis 12:00* im **10.23 Nusselt-Hörsaal** statt.
- Studenten, die die Übungsklausur als Prüfungsleistung einbringen können und wollen, müssen sich im Sekretariat bei Frau Dr. Nagato-Plum anmelden. Anderenfalls ist eine Anmeldung nicht erforderlich. Anmeldefrist läuft am *24. Januar 2018 um 12:00* ab.
- Zugelassene Hilfmittel sind ausschließlich zwei handbeschriftete DIN A4 Blätter (vier Seiten).
- Themenumfang der Übungsklausur ist der gesamte bis zum *19. Januar 2017* in den Vorlesungen und Übungen behandelte Stoff.
- Beachten Sie weitere Hinweise auf der Homepage der Veranstaltung.

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgabe 61, 62, 63 und 64 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.