Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Michal Jex

WS2017/18
19.1.2018

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 11. Übungsblatt

Aufgabe 61:

- *Induktionsanfang (IA):*
  Von Vorlesung haben wir, dass $(x^{-1})' = -x^{-2}$ gilt.

- *Induktionsschluss (IS):*
  Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte die *Induktionsvoraussetzung (IV)*

$$(x^{-n})' = -nx^{-(n+1)}.$$

Dann gilt für $n+1$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right)' &= \left(\frac{1}{x}\frac{1}{x^n}\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)'\frac{1}{x^n} + \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x^n}\right)' \\ &= -\frac{1}{x^2}\frac{1}{x^n} + \frac{1}{x}\left(-n\frac{1}{x^{n+1}}\right) = -\frac{1}{x^{n+2}} - n\frac{1}{x^{n+2}} = -(n+1)\frac{1}{x^{n+2}}\end{aligned}$$

□

Aufgabe 62:

- $x \neq 0$:
  Die Ableitung von f ist

$$f'(x) = nx^{n-1}\sin(x^{-m}) + x^n\left(-m\frac{1}{x^{m+1}}\right)\cos(x^{-m}) \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\ .$$

- $x = 0$:
  Der Limes $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x^{n-1}\sin(x^{-m})$ muss existieren. Dann haben wir, dass Ableitung existiert, wenn $n > 1$. Für stetige Differenzbarkeit muss $f'(0) = \lim_{x\to 0} f'(x)$ sein. Das gilt, wenn $n > m+1$, weil

$$f'(x) = nx^{n-1}\sin(x^{-m}) - mx^{n-m-1}\cos(x^{-m}) \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\ .$$

□

Aufgabe 63:

(a) a ist ein Lokales Minimum ist equivalent zum $f(a) \leq f(x)$ mit $x \in U_\delta(a)$. Dann haben wir $f(x) - f(a) \geq 0 \; \forall x \in U_\delta(a)$ und deshalb $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$ und auch $f_+(a) \geq 0$.

(b) Wenn f diferenzbar ist, dann $f'_+(x) = f'(x)$ ist. Wir benutzen Mittelwertsatz

$$f(a+\epsilon) - f(a) = f'(\xi)\epsilon\,.$$

Wir können auch schreiben

$$f(a) = f(a+\epsilon) - f'(\xi)\epsilon \leq f(a+\epsilon)\,.$$

□

Aufgabe 64:
Die Ungleichung gilt, wann am mindestens ein $a_j = 0$ ist.
Dann gelte $a_j > 0$. Für jede $a_j > 0$ existiert $x_j \in \mathbb{R}$ so, dass $a_j = \exp(x_j)$. Wir haben

$$\exp\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j\right) = \prod_{j=1}^n \exp(\lambda_j x_j) = \prod_{j=1}^n (\exp x_j)^{\lambda_j}$$

und

$$\exp\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j \exp\left(x_j\right)\,.$$

Zusammen haben wir

$$\prod_{j=1}^n (\exp x_j)^{\lambda_j} \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j \exp\left(x_j\right)\,.$$

Wir können λ_j als $\frac{1}{n}$ wahlen und dann

$$\prod_{j=1}^n (\exp x_j)^{\frac{1}{n}} = \left(\prod_{j=1}^n (\exp x_j)\right)^{\frac{1}{n}} \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \exp\left(x_j\right) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \exp\left(x_j\right)\,.$$

□

Aufgabe 65:
Wir nehmen die Funktion $h(t) = f_1(t) - f_2(t)$. Es gilt, dass $h(0) = 0$ und $h'(t) > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$. Nach dem Mittelwertsatz, wissen wir $h(t) > 0$, weil $h(t) = h(t) - h(0) = h'(\xi)t > 0$ mit $\xi \in (0,t)$. $h(t) > 0$ impliziert $f_2(t) > f_1(t)$. Die Physikalische Bedeutung ist, dass das schneller Auto weiter ankommt. □

Aufgabe 66:

(a) Die Funktion f ist stetig und das Intervall $I := [-3, 2]$ ist beschränkt und abgeschlossen, deshalb nimmt f auf I Maximum und Minimum an. Seien etwa $x_m, x_M \in I$ mit

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \qquad \forall x \in I.$$

Sei $x_0 \in \{x_m, x_M\}$ ein lokales Extremum. Sei $\mathring{I} := (-3, 2)$. Es ist klar, dass f auf $\mathring{I}$ differenzierbar ist und

$$f'(x) = 4x^3 - 8x \quad \forall x \in \mathring{I}$$

gilt. Ist $x_0 \in \mathring{I}$, so gilt $f'(x_0) = 0$. Die Nullstellen der Ableitung sind durch

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 4x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 2 \Leftrightarrow x \in \left\{0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$$

für alle $x \in \mathring{I}$ bestimmt. Durch Vergleich der Funktionswerte an den möglichen Extremalstellen

$$\begin{aligned} f(-3) &= (-3)^4 - 4 \cdot (-3)^2 + 2 = 81 - 4 \cdot 9 + 2 = 47, \\ f\left(-\sqrt{2}\right) &= f\left(\sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^4 - 4 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 + 2 = 4 - 4 \cdot 2 + 2 = -2, \\ f(0) &= 2 \quad \text{und} \\ f(2) &= 2^4 - 4 \cdot 2^2 + 2 = 2 \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} x_m &\in \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\},\ f(x_m) = -2 = \min\left\{f(x) : x \in I\right\}, \\ x_M &= -3,\ f(x_M) = 47 = \max\left\{f(x) : x \in I\right\}. \end{aligned}$$

(b) Die Funktion f ist stetig. Das Intervall $I := [0, 10]$ ist beschränkt und abgeschlossen, deshalb nimmt f auf I Maximum und Minimum an. Seien etwa $x_m, x_M \in I$ mit

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \qquad \forall x \in I.$$

Sei $x_0 \in \{x_m, x_M\}$ ein lokales Extremum. Seien $I_1 := (0, 3)$, $I_2 := (3, 10)$. Für alle $x \in I_1$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= -6x + (|x-3| + 2)^2 \overset{x \leq 3}{=} -6x + (3 - x + 2)^2 = -6x + (5 - x)^2 \\ &= -6x + x^2 - 10x + 25 = x^2 - 16x + 25. \end{aligned}$$

Für alle $x \in I_2$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= -6x + (|x-3| + 2)^2 \overset{x \geq 3}{=} -6x + (x - 3 + 2)^2 = -6x + (x - 1)^2 \\ &= -6x + x^2 - 2x + 1 = x^2 - 8x + 1. \end{aligned}$$

Mit diesen Darstellungen ist klar, dass f auf I_1 bzw. I_2 differenzierbar ist und

$$f'(x) = 2x - 16 \quad \forall x \in I_1, \qquad \text{sowie} \qquad f'(x) = 2x - 8 \quad \forall x \in I_2.$$

Ist $x_0 \in I_1 \cup I_2$, so gilt $f'(x_0) = 0$. Die Nullstellen der Ableitung werden wie folgt bestimmt. Für alle $x \in I_1$ gilt

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 16 = 0 \Leftrightarrow x = 8 \overset{8 \notin I_1}{\Leftrightarrow} \text{falsch.}$$

Für alle $x \in I_2$ gilt hingegen

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4.$$

Durch Vergleich der Funktionswerte an den möglichen Extremalstellen

$$\begin{aligned} f(0) &= -6 \cdot 0 + ((3-0)+2)^2 = 5^2 = 25, \\ f(3) &= -6 \cdot 3 + ((3-3)+2)^2 = -18 + 2^2 = -14, \\ f(4) &= -6 \cdot 4 + ((4-3)+2)^2 = -24 + 9 = -15 \quad \text{und} \\ f(10) &= -6 \cdot 10 + ((10-3)+2)^2 = -60 + 81 = 21 \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} x_m &= 4,\ f(x_m) = -15 = \min\{f(x) :\ x \in I\}, \\ x_M &= 0,\ f(x_M) = 25 = \max\{f(x) :\ x \in I\}. \end{aligned}$$

(c) Die Funktion f ist stetig. Das Intervall $I := [0, 10]$ ist beschränkt und abgeschlossen, deshalb nimmt f auf I Maximum und Minimum an. Seien etwa $x_m, x_M \in I$ mit

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \qquad \forall x \in I.$$

Sei $x_0 \in \{x_m, x_M\}$ ein lokales Extremum. Sei $\mathring{I} := (-2, 2)$. Es ist klar, dass f auf $\mathring{I}$ differenzierbar ist und

$$f'(x) = -\sin(x)\cos(\cos(x)) \quad \forall x \in \mathring{I}$$

gilt. Ist $x_0 \in \mathring{I}$, so gilt $f'(x_0) = 0$. Die Nullstellen der Ableitung sind durch

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\sin(x)\cos(\cos(x)) = 0 \Leftrightarrow x = 0 + \pi n \vee \cos(x) = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \Leftrightarrow x = 0 \overset{|\cos(x)| \leq 1}{\Leftrightarrow} x = 0$$

für alle $x \in \mathring{I}$ bestimmt. Durch Vergleich der Funktionswerte an den möglichen Extremalstellen

$$\begin{aligned} f(-2) &= \sin(\cos(-2)), \\ f(0) &= \sin(\cos(0)) \quad \text{und} \\ f(2) &= \sin(\cos(2)) \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} x_m &\in \{-2, 2\},\ f(x_m) = \sin(\cos(2)) = \min\{f(x) :\ x \in I\}, \\ x_M &= 0,\ f(x_M) = \sin(\cos(1)) = \max\{f(x) :\ x \in I\}. \end{aligned}$$

(d) Die Funktion f ist stetig. Das Intervall $I := [1,3]$ ist beschränkt und abgeschlossen, deshalb nimmt f auf I Maximum und Minimum an. Seien etwa $x_m, x_M \in I$ mit

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \qquad \forall x \in I.$$

Sei $x_0 \in \{x_m, x_M\}$ ein lokales Extremum. Sei $\mathring{I} := (1,3)$. Es ist klar, dass f auf $\mathring{I}$ differenzierbar ist und

$$f'(x) = \frac{2x-1}{x^2 - x + e^{-1}} \quad \forall x \in \mathring{I}$$

gilt. Ist $x_0 \in \mathring{I}$, so gilt $f'(x_0) = 0$. Die Nullstellen der Ableitung sind durch

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x^2 - x + e^{-1}} = 0 \overset{\frac{1}{2} \notin \mathring{I}}{\Leftrightarrow} \text{falsch.}$$

Durch Vergleich der Funktionswerte an den möglichen Extremalstellen

$$\begin{aligned} f(1) &= -1 \quad \text{und} \\ f(3) &= \ln(6 + e^{-1}) \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} x_m &= 1,\ f(x_m) = -1 = \min\{f(x) : x \in I\}, \\ x_M &= 3,\ f(x_M) = \ln(6 + e^{-1}) = \max\{f(x) : x \in I\}. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 67:

Bemerkung: **Regeln von de l'Hospital**

Seien $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ auf (a,b) differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Weiter sei $\lim_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

(a) $\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x \to b} g(x) = 0$, so gilt

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to L, \quad x \to b.$$

(b) $\lim_{x \to b} g(x) = \pm\infty$, so gilt

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to L, \quad x \to b.$$

Lösung:

(a) Nach der Regel von l'Hospital aus (b) gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{\ln(x^2+3)}^{\xrightarrow{x\to\infty}\infty}}{\underbrace{\ln(x)}_{\xrightarrow{x\to\infty}\infty}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x^2+3}}{\underbrace{\frac{1}{x}}_{\neq 0 \text{ für } x \neq 0}} = 2 \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+3} = 2 \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{3}{x^2}} = 2.$$

(b) Nach der Regel von l'Hospital aus (a) gilt

$$\lim_{x\to 1} \frac{\overbrace{1+\cos(\pi x)}^{\xrightarrow{x\to 1} 0}}{\underbrace{x^2-2x+1}_{\xrightarrow{x\to 1} 0}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{-\pi\sin(\pi x)}{\underbrace{2x-2}_{\neq 0 \text{ für } x\neq 0}} = -\pi \lim_{x\to 1} \frac{\overbrace{\sin(\pi x)}^{\xrightarrow{x\to 1} 0}}{\underbrace{2x-2}_{\xrightarrow{x\to 1} 0}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} -\pi^2 \lim_{x\to 1} \frac{\cos(\pi x)}{\underbrace{2}_{\neq 0}} = \frac{\pi^2}{2}.$$

(c) Sinus ist für jedes $x \geq 0$ auf $[\sqrt{x}, \sqrt{x+1}]$ stetig und auf $(\sqrt{x}, \sqrt{x+1})$ differenzierbar. Nach dem Mittelwertsatz, existiert ein $\xi_x \in (\sqrt{x}, \sqrt{x+1})$ mit

$$\begin{aligned} \sin(\sqrt{x}) - \sin(\sqrt{x+1}) &= -\left(\sin(\sqrt{x+1}) - \sin(\sqrt{x})\right) = -\cos(\xi_x)(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \\ &= -\cos(\xi_x)\left(\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right) = -\cos(\xi_x)\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right). \end{aligned}$$

Folglich

$$\left|\sin(\sqrt{x}) - \sin(\sqrt{x+1})\right| = \underbrace{|-\cos(\xi_x)|}_{\leq 1} \left|\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{x\to\infty} 0,$$

also

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sin(\sqrt{x}) - \sin(\sqrt{x+1})\right) = 0.$$

(d) Nach der Regel von l'Hospital aus (a) gilt

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\overbrace{\sin(\sin(x))}^{\xrightarrow{x\to\pi} 0}}{\underbrace{x-\pi}_{\xrightarrow{x\to\pi} 0}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to\pi} \frac{\cos(\sin(x))\cos(x)}{\underbrace{1}_{\neq 0}} = -1.$$

(e) Nach der Regel von l'Hospital gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\ln(\cos(3x))}^{\xrightarrow{x\to 0} 0}}{\underbrace{\ln(\cos(2x))}_{\xrightarrow{x\to 0} 0}} &\overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-3\frac{\sin(3x)}{\cos(3x)}}{\underbrace{-2\dfrac{\sin(2x)}{\cos(2x)}}_{\neq 0 \text{ für } x\notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}}} = \frac{3}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\tan(3x)}^{\xrightarrow{x\to 0} 0}}{\underbrace{\tan(2x)}_{\xrightarrow{x\to 0} 0}} \\ &\overset{\text{l'Hospital}}{=} \frac{3}{2} \lim_{x\to 0} \frac{3(1+\tan^2(3x))}{\underbrace{2(1+\tan^2(2x))}_{\neq 0}} = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

(f) Logarithmus ist für jedes $x \geq 1$ auf $[x, 1+\sqrt{1+x^2}]$ stetig und auf $(x, 1+\sqrt{1+x^2})$ differenzierbar. Nach dem Mittelwertsatz, existiert ein $\xi_x \in (x, 1+\sqrt{1+x^2})$ mit

$$\begin{aligned} x\left(\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right) - \ln(x)\right) &= \frac{x}{\xi_x}\left(1+\sqrt{1+x^2} - x\right) = \frac{x}{\xi_x}\left(1+\sqrt{1+x^2} - \sqrt{x^2}\right) \\ &= \frac{x}{\xi_x}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{x^2}}\right). \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}} = \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} \le \frac{x}{\xi_x} \le \frac{x}{x} = 1 \quad \text{wegen} \quad x < \xi_x < 1+\sqrt{1+x^2}$$

und damit ist $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\xi_x} = 1$ als Folgerung aus dem Einschnürungssatz. Deshalb ist

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x\left(\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right) - \ln(x)\right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\xi_x}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{x^2}}\right) \\
&= \left(\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\xi_x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{x^2}}\right)\right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

$\square$