Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Michal Jex

WS2017/18
22.1.2018

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

12. Übungsblatt

Aufgabe 68:

(a) Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und gilt $f'(a) \neq f'(b)$, so nimmt f' in (a,b) jeden Wert zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ an.
Hinweis: Man betracht $g(x) := f(x) - cx$ mit eine c zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$. Angenommen $f'(a) < c < f'(b)$, man zeige, dass g ein Minimum in (a,b) hat.

(b) Wenn f in einem Intervall J zweimal differenzierbarer ist, dann gibt es zu $x, y \in J$ eine Stelle z zwischen x und y derart, dass

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} = f\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{(x-y)^2}{8} \cdot f''(z)\,.$$

Hinweis: Man enutzt Taylorreihen mit Entwicklungsstelle $\frac{x+y}{2}$ und Zwischenwerttsatz wenn f'' stetig ist oder Teil (a) wenn f'' nicht stetig ist.

(c) Sei $f''(x)$ zweimal stetig differenzierbar, dann gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2} = f''(a)\,.$$

Aufgabe 69:
Zeigen Sie die folgende Ungleichung

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1$$

wo $\forall x > 0$.
Hinweis: Warum ist $f(x) = x - 1 - ln(x) \geq 0 \ \forall x > 0$.

Aufgabe 70:
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f in 0 ein globales Minimum hat.

(b) Zeigen Sie, dass $f^{(n)}(0) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

(c) Was bedeutet (b) für $T_n(f,0)$ und $R_n(f,0)$?

Aufgabe 71:

— **Bitte wenden!** —

(a) Sei $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(\cos(x))$. Finden Sie die erste Termen von Taylorreihe von f bis x^8,

(b) Sei $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(\sin(x))$. Finden Sie die erste Termen von Taylorreihe von f bis x^6.

Aufgabe 72:

(a) Berechnen Sie die Taylorreihe $T(\sin x, 0)$ mit Entwicklungsstelle 0. Zeigen Sie, dass die Reihe zu $\sin(x)$ für $\forall x \in \mathbb{R}$ konvergiert.

(b) Berechnen Sie die Taylorreihe $T(\cos x, 0)$ mit Entwicklungsstelle 0. Zeigen Sie, dass die Reihe zu $\cos(x)$ für $\forall x \in \mathbb{R}$ konvergiert.

(c) Berechnen Sie die Taylorreihe $T(\sin x, 2\pi)$ mit Entwicklungsstelle 2π. Zeigen Sie, dass die Reihe zu $\sin(x)$ für $\forall x \in \mathbb{R}$ konvergiert.

Aufgabe 73:

(a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x) = x^2 - 2x + 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. Bestimmen Sie eine Potenzreihe, die in einer Umgebung von $x_0 = 0$ die Funktion $\frac{1}{f}$ darstellt.

(b) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x) = x^2 + 2x - 3$ für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. Bestimmen Sie eine Potenzreihe, die in einer Umgebung von $x_0 = -1$ die Funktion $\frac{1}{f}$ darstellt.

Aufgabe 74:
Berechnen Sie die Summe von die folgenden Reihen

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$,

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \ln a)^n}{n!}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{5^{2n+1}} \frac{2n}{(2n+1)!}$.

Hinweis: Finden Sie ein Funktion f so, dass die obige Reihe gleich der Taylorreihe von f ist.

Übungsklausur: Beachten Sie Hinweise auf der Homepage der Veranstaltung.

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgabe 68, 69, 70 und 71 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.