Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Michal Jex

WS2017/18
26.1.2018

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 12. Übungsblatt

Aufgabe 68:

(a) Es sei c irgendeine Zahl zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$. Für die Funktion g mit

$$g(x) = f(x) - cx$$

ist dann zu zeigen, dass ihre Ableitung g' in (a,b) den Wert 0 annimmt. Nach Voraussetzung liegt 0 zwischen $g'(a)$ und $g'(b)$, so dass wir etwa annehmen können:

$$g'(a) > 0 \quad \text{und} \quad g'(b) < 0\,.$$

Die stetige Funktion g besitzt nun in $[a,b]$ ein Maximum; wir zeigen, dass dies nicht in den Endpunkten liegen kann: Würde nämlich in einer (rechtsseitigen) Umgebung von a

$$g(x) \leq g(a)$$

gelten, so würde $g'(a) \leq 0$ folgen. Entsprechend ergäbe sich aus

$$g(x) \leq g(b)$$

in einer (linksseitigen) Umgebung von b für die Ableitung $g'(b) \geq 0$.
Also wird das Maximum von g im Innern des Interval angenommen. Dort muss g' den Wert 0 annehmen und also f' den Wert c.
Bemerkung: Wenn wir $g'(a) < 0$ und $g'(b) > 0$ annehmen, dann suchen wir ein Minimum in $c \in (a,b)$.

(b) Wir haben die Taylorpolynom

$$f(z) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f'\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(z - \frac{x+y}{2}\right) + \frac{f''(c)}{2}\left(z - \frac{x+y}{2}\right)^2$$

mit $c \in \left(\min\left\{\frac{x+y}{2}, z\right\}, \max\left\{\frac{x+y}{2}, z\right\}\right)$. Für $z = x$ und $z = y$ haben wir

$$f(x) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f'\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(x - \frac{x+y}{2}\right) + \frac{f''(c_1)}{2}\left(x - \frac{x+y}{2}\right)^2,$$
$$f(y) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f'\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(y - \frac{x+y}{2}\right) + \frac{f''(c_2)}{2}\left(y - \frac{x+y}{2}\right)^2.$$

Wir addieren diese Gleichungen

$$f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{f''(c_1) + f''(c_2)}{2}\left(\frac{x-y}{2}\right)^2.$$

f ist zweimal differenzierbar deshalb $f'(x)$ differenzierbar ist und von (a) existiert z zwischen c_1 und c_2 so, dass $\frac{f''(c_1)+f''(c_2)}{2} = f''(z)$.

(c) Wir nehmen die Teil (b) und benutzen die Substitution $x = a + h$ und $y = a - h$, dann

$$f''(z) = \frac{f(a+h) + f(a-h) - f(a)}{h^2}$$

mit $z \in (a - h, a + h)$. Limes aus die oberige Gleichnug ist

$$\lim_{h\to 0} f''(z) = f''(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - f(a)}{h^2}$$

wo wir die Stetigkeit von $f''(x)$ benutzt haben.

$\square$

Aufgabe 69:

Wir zeigen, dass $f_1(x) = x - 1 - \ln(x)$ und $f_2(x) = \ln(x) - 1 + \frac{1}{x}$ positiv sind. Die Ableitungen sind

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= 1 - \frac{1}{x}, \\ f_2'(x) &= \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Beide Funktionen haben Minimum in $x = 1$, weil $f_i(x) < 0$ für $0 < x < 1$ und $f_i(x) > 0$ für $1 < x$. Die Minimum sind $f(1) = 0 = f(2)$ und deshalb $f_1(x) \geq 0$ und $f_2(x) \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^+$.
Bemerkung: $f_1(x) = f_2\left(\frac{1}{x}\right)$. $\square$

Aufgabe 70:

(a) Wir nehmen zwei Intervalen $\mathbb{R}^+$ und $\mathbb{R}^-$. Die Ableitung von f für $x \neq 0$ ist

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

Dann haben wir, dass $f(x)$ eine steigende Funktion für $x > 0$ ist und dass $f(x)$ eine fallende Funktion für $x < 0$ ist. Dann Minimum ist in $x = 0$, weil f eine stetige Funktion ist.

(b) Wir zeigen mit Induktion, dass $f^{(n)}(x) = \mathcal{P}_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ wo $\mathcal{P}_{3n}(x)$ ist ein Polynom von Grad $3n$. Wir wissen, dass stetige Funktion mit gleichen Ableitungen von links und rechts in c die Ableitung in c hat. Wir zeigen die Existenz von der Ableitung mit Induktion.

- *Induktionsanfang (IA):*
  Von (a) haben wir $f'(x) = \frac{2}{x^3}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$, $x \neq 0$. Die Funktion f ist stetig, weil $\lim_{x\to 0, x\neq 0} f(x) = f(0)$. Die Ableitung von links in 0 ist $\lim_{x\to 0_-} f'(x) = 0$ und von rechts $\lim_{x\to 0_+} f'(x) = 0$.

- *Induktionsschluss (IS):*
  Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte die *Induktionsvoraussetzung (IV)*

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \mathcal{P}_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Dann gilt für $n+1$ und $x \neq 0$

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' &= -\frac{1}{x^2}\mathcal{P}_{3n-1}\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \mathcal{P}_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)\frac{2}{x^3}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \mathcal{P}_{3n+3}\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right). \end{aligned}$$

Wir können schreiben

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) &= \lim_{x\to 0}\mathcal{P}_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{m\to\infty}\mathcal{P}_{3n}(m)\exp\left(-m^2\right) = 0\,, \\ \lim_{x\to 0_+} f^{(n+1)}(x) &= \lim_{x\to 0_+}\mathcal{P}_{3n+3}\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0\,, \\ \lim_{x\to 0_-} f^{(n+1)}(x) &= \lim_{x\to 0_-}\mathcal{P}_{3n+3}\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0\,. \end{aligned}$$

Dann haben wir $f^{(n+1)}(0) = 0$.

(c) Die Taylorpolynom ist $T_n(f,0) = 0$ aber es konvergiert zum f nur für $f = 0$. Die Problem ist, weil f keine analytische Funktion ist.

□

Aufgabe 71:

(a) Wir nehmen die erste Termen von Taylorreihe für

$$\begin{aligned} \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} + (x^{10})\,, \\ \ln(1+y) = x - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \mathcal{O}(y^5)\,. \end{aligned}$$

Dann haben wir $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} + (x^{10})$ und

$$\begin{aligned} \ln(1+x) = &\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320}\right) - \frac{\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320}\right)^2}{2} \\ &+ \frac{\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320}\right)^3}{3} - \frac{\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320}\right)^4}{4} + \mathcal{O}(x^{10}) \end{aligned}$$

Wir nehmen nur Termen bis x^8

$$\begin{aligned} \ln(1+x) =& x^2\left(-\frac{1}{2}\right) + x^4\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{2}\frac{1}{4}\right) + x^6\left(-\frac{1}{720} - 2\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{24} + \frac{1}{3}\frac{1}{(-2)^3}\right) \\ &+ x^8\left(\frac{1}{40320} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(24)^2} + 2\frac{-1}{2}\frac{-1}{720}\right) + \frac{1}{3}\left(3\frac{1}{(-2)^2}\frac{1}{24}\right) - \frac{1}{4}\frac{1}{(-2)^4}\right) + \mathcal{O}(x^{10}) \\ =& x^2\left(-\frac{1}{2}\right) + x^4\left(-\frac{1}{12}\right) + x^6\left(-\frac{1}{45}\right) + x^8\left(-\frac{17}{2520}\right) + \mathcal{O}(x^{10})\,. \end{aligned}$$

(b) Wir nehmen die erste Termen von Taylorreihe für

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathcal{O}(x^7)\,.$$

Dann haben wir

$$\sin(\sin(x)) = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right) - \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^3}{6} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^5}{120} + \mathcal{O}(x^7)\,.$$

Wir nehmen nur Termen bis x^6

$$\begin{aligned}\sin(\sin(x)) &= x(1) + x^3\left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right) + x^5\left(\frac{1}{120} - \frac{1}{6}3\left(-\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{120}\right) + \mathcal{O}(x^7)\\ &= x - x^3\frac{1}{3} + x^5\frac{1}{10} + \mathcal{O}(x^7)\,.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 72:

(a) Die n-te Ableitung von $\sin x$ ist

$$(\sin x)^{(n)} = \begin{cases} \sin x & \text{für } n = 4k, \\ \cos x & \text{für } n = 4k+1, \\ -\sin x & \text{für } n = 4k+2, \\ -\cos x & \text{für } n = 4k+3, \end{cases} \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Die Taylorreihe ist $T_m(\sin(x), 0) = \sum_{n=0}^{m} a_n x^n$ wo

$$a_n = \begin{cases} \frac{0}{n!} & \text{für } n = 4k, \\ \frac{1}{n!} & \text{für } n = 4k+1, \\ \frac{0}{n!} & \text{für } n = 4k+2, \\ \frac{-1}{n!} & \text{für } n = 4k+3, \end{cases} \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Diese Reihe ist gleich zum $T_{2m+1}(\sin(x), 0) = \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ und den Rest können wir als $R_{2m+1}(\sin(x), 0) = \frac{c_{2m+2}}{(2m+2)!} x^{2m+2}$ mit $c_{2m+2} \in [-1, 1]$ schreiben. Die Reihe $T_{2m+1}(\sin(x), 0)$ ist konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$ aus Würzelkriterium für Potenzreihen, weil $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(2n+1)!}} = 0$. Wir müssen auch zeigen, dass der Rest zum 0 geht. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} R_{2m+1}(\sin(x), 0) = 0$$

weil $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$, $a \in \mathbb{C}$.

(b) Die n-te Ableitung von $\cos x$ ist

$$(\cos x)^{(n)} = \begin{cases} \cos x & \text{für } n = 4k, \\ -\sin x & \text{für } n = 4k+1, \\ -\cos x & \text{für } n = 4k+2, \\ \sin x & \text{für } n = 4k+3, \end{cases} \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Die Taylorreihe ist $T_m(\cos(x), 0) = \sum_{n=0}^m b_n x^n$ wo

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{n!} & \text{für } n = 4k, \\ \frac{0}{n!} & \text{für } n = 4k+1, \\ \frac{-1}{n!} & \text{für } n = 4k+2, \\ \frac{0}{n!} & \text{für } n = 4k+3, \end{cases} \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Diese Reihe ist gleich zum $T_{2m}(\cos(x), 0) = \sum_{n=0}^m (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ und den Rest können wir als $R_{2m}(\cos(x), 0) = \frac{c_{2m+1}}{(2m+1)!} x^{2m+1}$ mit $c_{2m+1} \in [-1, 1]$ schreiben. Die Reihe $T_{2m}(\cos(x), 0)$ ist konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$ aus Würzelkriterium für Potenzreihen, weil $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(2n)!}} = 0$. Wir müssen auch zeigen, dass der Rest zum 0 geht. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} R_{2m}(\cos(x), 0) = 0$$

weil $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$, $a \in \mathbb{C}$.

(c) Die n-te Ableitung von $\sin x$ ist

$$(\sin x)^{(n)} = \begin{cases} \sin x & \text{für } n = 4k, \\ \cos x & \text{für } n = 4k+1, \\ -\sin x & \text{für } n = 4k+2, \\ -\cos x & \text{für } n = 4k+3, \end{cases} \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Die Taylorreihe ist $T_m(\sin(x), 2\pi) = \sum_{n=0}^m d_n (x - 2\pi)^n$ wo

$$d_n = \begin{cases} \frac{0}{n!} & \text{für } n = 4k, \\ \frac{1}{n!} & \text{für } n = 4k+1, \\ \frac{0}{n!} & \text{für } n = 4k+2, \\ \frac{-1}{n!} & \text{für } n = 4k+3, \end{cases} \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Diese Reihe ist gleich zum $T_{2m+1}(\sin(x), 2\pi) = \sum_{n=0}^m (-1)^n \frac{(x-2\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!}$ und den Rest können wir als $R_{2m+1}(\sin(x), 2\pi) = \frac{c_{2m+2}}{(2m+2)!}(x - 2\pi)^{2m+2}$ mit $c_{2m+2} \in [-1, 1]$ schreiben. Die Reihe $T_{2m+1}(\sin(x), 2\pi)$ ist konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$ aus Würzelkriterium für Potenzreihen, weil $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(2n+1)!}} = 0$. Wir müssen auch zeigen, dass der Rest zum 0 geht. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} R_{2m+1}(\sin(x), 2\pi) = 0$$

weil $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$, $a \in \mathbb{C}$.

□

Aufgabe 73:

(a) Die Menge der Nullstellen von f ist $N(f) = \{1\}$. Also ist $\frac{1}{f}$ auf $D = \mathbb{R} \setminus N(f)$ erklärt. Gesucht ist eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ mit positivem Konvergenzradius $r > 0$ und

$$\frac{1}{x^2 - 2x + 1} = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n \qquad \forall x \in D : |x| < r.$$

Multiplizieren mit dem Nenner der linken Seite liefert die äquivalente Aussage

$$\begin{aligned}
1 \quad &= \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}\right) - 2\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \\
&\overset{\text{Index-Shift}}{=} \quad \left(\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n}\right) - 2\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n}\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \\
&= \quad \left(\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n}\right) - 2\left(a_0 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^{n}\right) + \left(a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n\right) \\
&= \quad a_0 + (a_1 - 2a_0)x + \sum_{n=2}^{\infty}(a_{n-2} - 2a_{n-1} + a_n)x^n \qquad \forall x \in D : |x| < r.
\end{aligned}$$

Beide Seiten dieser Gleichung sind eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius. Nach Satz 11.15 des Skriptes (Koeffizientenvergleich) gilt

$$a_0 = 1, \quad a_1 - 2a_0 = 0, \quad \forall n \geq 2 : a_{n-2} - 2a_{n-1} + a_n = 0$$

Die ersten fünf Koeffizienten sind

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1, \\
a_2 &= 2a_1 - a_0 = 4 - 1 = 3, \\
a_4 &= 2a_3 - a_2 = 8 - 3 = 5. \\
a_1 &= 2a_0 = 2, \\
a_3 &= 2a_2 - a_1 = 6 - 2 = 4,
\end{aligned}$$

Das legt die Vermutung $a_n = n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ nahe. Wir beweisen dies durch vollständige Induktion über n.

IA ($n = 0$): Klar.

IS ($n \rightsquigarrow n + 1$): Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Es gelte die *(IV)* $a_k = k + 1$ für alle $k \in \{0, \dots, n\}$. Dann gilt für $n + 1$ das Folgende. Ist $n = 0$, so ist $a_{n+1} = a_1 = 2 = (n + 1) + 1$. Ist $n \geq 1$, so gilt

$$a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} \overset{\text{(IV)}}{=} 2(n + 1) - (n - 1 + 1) = n + 2 = (n + 1) + 1.$$

Dies schließt den Beweis der Vermutung ab.

Wir müssen noch sicherstellen, dass die gefundene Potenzreihe einen positiven Konvergenzradius hat. Nach der Formel von Cauchy-Hadamard gilt

$$r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1}} = 1 > 0.$$

Für alle $|x| < 1$ gilt also

$$\frac{1}{x^2 - 2x + 1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n + 1)x^n.$$

(b) Die Menge der Nullstellen von f ist $N(f) = \{-3, 1\}$. Also ist $\frac{1}{f}$ auf $D = \mathbb{R} \setminus N(f)$ erklärt. Gesucht ist eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit positivem Konvergenzradius $r > 0$ und

$$\frac{1}{x^2 + 2x - 3} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x + 1)^n \qquad \forall x \in D : |x + 1| < r.$$

Multiplizieren mit dem Nenner der linken Seite liefert die äquivalente Aussage

$$\begin{aligned}
1 &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^n\right)\left(x^2+2x-3\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^n\right)\left((x+1)^2-4\right) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^{n+2}\right) - 4\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^n\right) \\
&\overset{\text{Index-Shift}}{=} \left(\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}(x+1)^n\right) - 4\left(a_0 + a_1(x+1) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(x+1)^n\right) \\
&= -4a_0 - 4a_1(x+1) + \sum_{n=2}^{\infty}(a_{n-2}-4a_n)(x+1)^n \qquad \forall x \in D : |x+1| < r.
\end{aligned}$$

Beide Seiten dieser Gleichung sind eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius. Nach Satz 11.15 des Skriptes (Koeffizientenvergleich) gilt

$$-4a_0 = 1, \quad -4a_1 = 0, \quad \forall n \geq 2 : a_{n-2} - 4a_n = 0.$$

Damit ergibt sich induktiv

$$\begin{aligned}
a_0 &= -\frac{1}{4}, \qquad a_{2n} = \frac{1}{4}a_{2(n-1)} = \cdots = \left(\frac{1}{4}\right)^n a_0 = -\left(\frac{1}{4}\right)^n \frac{1}{4} = -\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}, \\
a_1 &= 0, \qquad a_{2n+1} = \frac{1}{4}a_{2(n-1)+1} = \cdots = \left(\frac{1}{4}\right)^n a_1 = 0.
\end{aligned}$$

Wir müssen noch sicherstellen, dass die gefundene Potenzreihe einen positiven Konvergenzradius hat. Nach der Formel von Cauchy-Hadamard gilt

$$r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{4}}} = 2 > 0.$$

Für alle $|x+1| < 2$ gilt also

$$\frac{1}{x^2+2x-3} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{n+1}}(x+1)^{2n}.$$

□

Aufgabe 74:

(a) Wir nehmen die Taylorreihe $-\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n}$. Beim Vergleichung haben wir

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n} \overset{!}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}^n}{n}.$$

Es gilt, wenn $x = -\frac{1}{2}$. Dann $\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}^n}{n}$.

(b) Wir können schreiben $a = e^{\ln a}$ und $a^x = e^{x \ln a}$ deshalb

$$e^{x \ln a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \ln a)^n}{n!} .$$

(c) Wir haben die Reihe

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2nx^{2n+1}}{(2n+1)!} .$$

Wir nehmen die Reihe

$$\frac{\sin(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} .$$

Die Ableitung von oberiger Reihe ist

$$\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\right)' = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n+1} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2nx^{2n-1}}{(2n+1)!} = w(x) .$$

Wir müssen beweisen, dass wir die Reihe ableiten können. Man muss zeigen, dass $w(x)$ gleichmäßig konvergt in (a, b) und dass die Reihe $\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\right)$ für ein $x \in (a, b)$ konvergiert. Wir haben beide Eigenschaften mit Interval $(-1, 1)$ von Weierstraßsche Majorantenkriterium mit $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} < \infty$.
Wir benutzen

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2nx^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2nx^{2n+1}}{(2n+1)!} = x^2 w(x) .$$

Dann haben wir $s(x) = x^2 \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)' = x \cos(x) - \sin(x)$ und $s\left(\frac{1}{5}\right) = 0.2 \cos(0.2) - \sin(0.2)$.

□