Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Michal Jex

WS2017/18
29.1.2018

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

13. Übungsblatt

Aufgabe 75:
Die Gamma Funktion $\Gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ ist definiert durch

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt\,.$$

Zeigen Sie die folgende

(a) Das Integral in der Definition $\Gamma(x)$ ist konvergent für alle $x > 0$.

(b) Es gilt $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ für alle $x > 0$.

(c) Es gilt $\Gamma(n+1) = n!$ für $n \in \mathbb{N}$.

(d) Es gilt $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.
Hinweis: $2\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Aufgabe 76:
Sei $f : [c, \infty) \to \mathbb{R}_0^+$ eine monoton fallende Funktion, $c \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie die folgende

(a) The Reihe $\sum_{n=c}^\infty f(n)$ konvergiert $\Leftrightarrow$ Das Integral $\int_c^\infty f(x)dx$ konvergiert.
Hinweis: (i)$\int_c^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_c^b f(x)dx$ falls Limes existiert.
(ii) Malen Sie eine Bild mit f und zwei geschickt gewählte Treppenfunktionen ψ, ϕ, so dass $\psi \le f \le \phi$.

(b) The Reihe $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\log(n)}$ divergiert.

(c) The Reihe $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n(\log(n))^{1+\epsilon}}$, $\epsilon > 0$ konvergiert.

Aufgabe 77:
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton auf I. Ist f in $x_0 \in I$ differenzierbar und $(f^{-1})'(x_0) \neq 0$, so ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar und

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}\,.$$

Aufgabe 78:
Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Wert.

(i) $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$, (ii) $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{\cosh x - 1}}$.

— **Bitte wenden!** —

Aufgabe 79:

Berechnen Sie die Integrale

(i) $\int_{-2}^{2} |t-1|\,dt$,

(ii) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})} dt$,

(iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} t^2 \sin(2t) dt$,

(iv) $\int_1^4 \arctan\left(\sqrt{\sqrt{t}-1}\right) dt$.

(v) $\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin(t)|\,dt$ für festes $k \in \mathbb{Z}$,

(vi) $\int_1^e \frac{1}{t(1+\ln(t))} dt$,

(vii) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \arcsin(t) dt$ und

(viii) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{\sin(t)} dt$.

Aufgabe 80:

Berechnen Sie die Integrale

(i) $\int_0^1 (1+2t)^3 dt$,

(ii) $\int_1^e t \ln(t) dt$,

(iii) $\int_1^2 \frac{t^3}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} dt$,

(iv) $\int_{\frac{\ln(3)}{2}}^{\frac{\ln(7)}{2}} \frac{1}{\sinh(t)\cosh(t)} dt$.

(v) $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{9-4t^2}} dt$,

(vi) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} t\cos(t) dt$,

(vii) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\sqrt{1-t}} dt$ und

(viii) $\int_{-\frac{\ln(3)}{2}}^{\frac{\ln(3)}{2}} \frac{e^t+3}{e^{2t}+1} dt$.

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgabe 75, 76, 77 und 78 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.