Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Michal Jex

WS2017/18
2.2.2018

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 13. Übungsblatt

Aufgabe 75:

(a) Unendliches Integral $\int_0^\infty f$ von einem positiv stetige Funktion konvergiert, wenn eine stetige Funktion g existiert so, dass $0 \geq f \leq g$ und $\int_0^\infty g$ konvergiert. Die Funktion $t^{x-1}e^{-\frac{t}{2}}$ konvergiet zum 0 als $t \to \infty$ deshalb existiert ein t_0 so, dass $t^{x-1}e^{-\frac{t}{2}} \leq 1$ für $t \geq t_0$. Dann

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt &= \int_0^{t_0} t^{x-1}e^{-t}dt + \int_{t_0}^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \leq \int_0^{t_0} t^{x-1}dt + \int_{t_0}^\infty e^{-\frac{t}{2}}dt \\ &= \left[\frac{t^x}{x}\right]_0^{t_0} + \left[-2\exp\left(-\frac{t}{2}\right)\right]_{t_0}^\infty\end{aligned}$$

(b) Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty \underbrace{t^x}_{=g(t)} \cdot \underbrace{e^{-t}}_{=f'(t)} dt \overset{\text{P.I.}}{=} \left[-t^x e^{-t}\right]_0^\infty - \int_0^\infty -(x)t^{x-1}e^{-t}dt = 0 + x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \\ &= x\Gamma(x)\end{aligned}$$

(c) Wir beweisen dies durch vollständige Induktion über n.

IA $(n = 1)$: Partielle Integration liefert

$$\Gamma(2) = \int_0^\infty \underbrace{t}_{=g(t)} \cdot \underbrace{e^{-t}}_{=f'(t)} dt \overset{\text{P.I.}}{=} \left[-te^{-t}\right]_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-t}dt = 0 + \int_0^\infty e^{-t}dt = 1\,.$$

IS $(n \rightsquigarrow n+1)$: Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Es gelte die *(IV)* $\Gamma(k+1) = k!$ für alle $k \in \{0, \ldots, n\}$. Dann gilt für $n+1$ das Folgende

$$\Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)n! = (n+1)!\,,$$

wo wir den Teil (b) benutzt haben.

(d) Es gilt nach der Substitutionsregel

$$\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt \underset{\frac{dt}{ds}=2s}{\overset{t=s^2}{=}} \int_0^\infty s^{-1}e^{-s^2}2sds = 2\int_0^\infty e^{-s^2}ds = \sqrt{\pi}\,.$$

$\square$

Aufgabe 76:

(a) Wir benutzen die folgende Abschätzung

$$f(c+k+1) = \min_{x\in[c+k,c+k+1]} f(x) \le \int_{c+k}^{c+k+1} f(x)dx \le \max_{x\in[c+k,c+k+1]} f(x) = f(c+k)\,, \forall k,n \in \mathbb{N}\,.$$

Die Funktion $f(x)$ is monoton fallende deshalb gelten $f(x+k) = \min_{x\in[c+k,c+k+1]} f(x)$ und $f(x+k+1) = \max_{x\in[c+k,c+k+1]} f(x)$. Dann gilt auch

$$\sum_{k=0}^{N} \min_{x\in[c+k,c+k+1]} f(x) \int_{c+k}^{c+k+1} 1dx \le \sum_{k=0}^{N} \int_{c+k}^{c+k+1} f(x)dx = \int_{c}^{N} f(x)dx =$$
$$\int_{c}^{N} f(x)dx = \sum_{k=0}^{N} \int_{c+k}^{c+k+1} f(x)dx \le \sum_{k=0}^{N} \max_{x\in[c+k,c+k+1]} f(x) \int_{c+k}^{c+k+1} 1dx\,.$$

Wir haben die Ungleichung

$$\sum_{k=0}^{N} f(c+k+1) \le \int_{c}^{N} f(x)dx \le \sum_{k=0}^{N} f(c+k)\,.$$

und auch

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} f(c+k+1) \le \lim_{N\to\infty} \int_{c}^{N} f(x)dx \le \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} f(c+k)\,.$$

Die Folgen $\sum_{k=0}^{N} f(c+k)$, $\int_c^N f(x)dx$ sind monoton wachende. Wir wissen, dass alle beschränkte monotone Folgen konvergent sind. Ob $\int_c^\infty f(x)dx$ konvergiert, muss auch $\sum_{k=c}^{\infty} f(k)$ konvergiert und umgekehrt.

(b) Wir zeigen, dass $\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x}$ nicht konvergiert und wir benutzen den Teil (a). Es gilt nach der Substitutionsregel

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x} \underset{\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t}}{\overset{\ln x=t}{=}} \int_{\ln 2}^\infty \frac{dt}{t} = [\ln t]_{\ln 2}^{\infty} = \infty\,.$$

(c) Wir zeigen, dass $\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^{1+\epsilon}}$ konvergiert und wir benutzen den Teil (a). Es gilt nach der Substitutionsregel

$$\int_2^\infty \frac{dx}{xx(\ln x)^{1+\epsilon}} \underset{\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t}}{\overset{\ln x=t}{=}} \int_{\ln 2}^\infty \frac{dt}{t^{1+\epsilon}} = \left[-\frac{t^{-\epsilon}}{\epsilon}\right]_{\ln 2}^{\infty} = \frac{1}{\epsilon(\ln 2)^\epsilon}\,.$$

$\square$

Aufgabe 77:

Existenz:

O.b.d.A die Funktion f ist wachende. Dann von Voraussetzung ist auch f^{-1} stetig und streng monoton wachende. Es gilt $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Wir schreiben $x_h = f^{-1}(y_0 + h)$. Dann haben wir

$$\frac{f^{-1}(y_0+h) - f^{-1}(y_0)}{h} = \frac{x_h - x_0}{f(x_h) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x_h)-f(x_0)}{x_h - x_0}} \,.$$

Wir nehmen das Limes $h \to 0$. Wir wissen, dass $\lim_{h\to 0} x_h = x_0$ gilt, weil f^{-1} stetig ist. Die Grenzwert am rechte Seite existiert und ist beschränkt von die Voraussetzungen.

Formal Berechnung:
Wir benutzen die Kettenregel mit $y = f(f^{-1}(y))$. Wir haben

$$\frac{dy}{dy} = 1 = \frac{f(f^{-1}(y))}{dy} = f'(f^{-1}(y))(f^{-1})'(y)$$

und auch

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)} \,.$$

□

Aufgabe 78:

(i) $\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ für $x \to 0$ und $\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$ für $x \to \infty$. Somit das Integral konvergent.
Man kann auch den Wert auch bestimmen, durch Substitution: $g(x) = \sqrt{x}$, $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Somit ist

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \int_0^\infty \frac{2g'(x)dx}{1+g^2(x)} = \int_{g(0)}^{g(\infty)} \frac{2dy}{1+y^2} = [2\arctan y]_0^\infty = 2\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \pi \,,$$

da $\lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ (daraus folgt näturlich auch schon die Konvergenz).

(ii) Für $x \to \infty$ gilt wegen $\cosh x = \mathcal{O}(e^x)$, dass $\frac{dx}{\sqrt{\cosh x - 1}} = \mathcal{O}\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)$. Also integrierbar bei $+\infty$.
Motivation: In der Nähe der 0 gilt $\cosh x \approx 1 + \frac{x^2}{2}$, also $\frac{1}{\sqrt{\cosh x - 1}} = \frac{\sqrt{2}}{x} + o(x^{-1})$, $x \to 0_+$.
Beweis: Für $x \to 0_+$ gilt $\lim_{x\to 0_+} \frac{\cosh x - 1}{x^2} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0_+} \frac{\sinh x}{2x} \overset{l'H}{=} \frac{1}{2}$.
Somit ist $\frac{1}{\cosh x - 1} = \frac{2}{x^2} + o(x^{-2})$, $x \to 0_+$ und damit $\frac{1}{\sqrt{\cosh x - 1}} = \frac{\sqrt{2}}{x} + o(x^{-1})$, $x \to 0_+$.
Insbesondere gibt es wegen dieser Konvergenz zu $\epsilon = \frac{1}{2}$ ein $\delta > 0$, so dass $\left|\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{\cosh x - 1}} - 1\right| < \epsilon = \frac{1}{2}$ für alle $x \in (0, \delta)$. Dies bedeutet, dass $\frac{1}{\sqrt{\cosh x - 1}} > \frac{1}{\sqrt{2}x}$ für alle $x \in (0, \delta)$. D.h.

$$\int_0^\delta \frac{dx}{\sqrt{\cosh x - 1}} \geq \int_0^\delta \frac{dx}{\sqrt{2}x} = \infty \,,$$

das Integral ist also nicht konvergent.

□

Aufgabe 79:
Wir halten zunächst fest, dass jeder Integrand auf dem jeweiligen Integrationsintervall stetig ist und deshalb auch integrierbar.

(i) Es gilt

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2}|t-1|\,dt &= \int_{-2}^{1}|t-1|\,dt+\int_{1}^{2}|t-1|\,dt=\int_{-2}^{1}(1-t)dt+\int_{1}^{2}(t-1)dt\\ &= \left[t-\frac{t^2}{2}\right]_{t=-2}^{t=1}+\left[\frac{t^2}{2}-t\right]_{t=1}^{t=2}=5.\end{aligned}$$

(ii) Es gilt nach der Substitutionsregel

$$\begin{aligned}\int_{1}^{4}\frac{1}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})}dt &= \int_{1}^{4}\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{t}}}_{=g'(t)}\underbrace{\frac{2}{1+\underbrace{\sqrt{t}}_{=g(t)}}}_{=f(g(t))}dt=\int_{g(1)}^{g(4)}f(x)dx=\int_{1}^{2}\frac{2}{1+x}dx\\ &= 2\left[\ln(1+x)\right]_{x=1}^{2}=2\left(\ln(3)-\ln(2)\right)=2\ln\left(\frac{3}{2}\right).\end{aligned}$$

(iii) Es gilt nach der Regel der partiellen Integration

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{\frac{1}{2}t^2}_{=g(t)}\underbrace{\sin(2t)}_{=f'(t)}\,dt &\overset{\text{P.I.}}{=} -\left[\frac{1}{2}\cos(2t)\cdot\frac{1}{2}t^2\right]_{t=0}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}t\cos(2t)dt\\ &= \frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}t\cos(2t)dt.\end{aligned}$$

Das verbliebene Integral wird wieder partiell integriert zu

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{t}_{=g(t)}\underbrace{\cos(2t)}_{=f'(t)}\,dt\overset{\text{P.I.}}{=}\left[t\cdot\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_{t=0}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin(2t)dt=\frac{1}{4}\left[\cos(2t)\right]_{t=0}^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{2}.$$

Insgesamt also

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}t^2\sin(2t)dt=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{4}.$$

(iv) Es gilt nach der Substitutionsregel

$$\begin{aligned}\int_{1}^{4}\arctan\left(\sqrt{\sqrt{t}-1}\right)dt &\underset{\frac{dt}{ds}=2s}{\overset{t=s^2}{=}} \int_{1}^{2}2s\arctan\left(\sqrt{s-1}\right)ds\\ &\underset{\frac{ds}{dx}=2x}{\overset{s=x^2+1}{=}} 4\int_{0}^{1}(x^2+1)x\arctan(x)dx.\end{aligned}$$

Weiter gilt nach der Regel der partiellen Integration

$$\begin{aligned}\int_{0}^{1}\underbrace{4(x^2+1)x}_{f'(x)}\underbrace{\arctan(x)dx}_{g(x)} &= \left[(x^4+2x^2)\arctan(x)\right]_{x=0}^{1}-\int_{0}^{1}\frac{x^4+2x^2}{1+x^2}\mathrm{dx}\\ &= \frac{3}{4}\pi-\int_{0}^{1}\frac{(1+x^2)^2-1}{1+x^2}\mathrm{dx}\\ &= \frac{3}{4}\pi+\int_{0}^{1}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{dx}-\int_{0}^{1}1+x^2\mathrm{dx}\\ &= \frac{3}{4}\pi+\left[\arctan(x)\right]_{x=0}^{x=1}-\left[x+\frac{1}{3}x^3\right]_{x=0}^{x=1}=\pi-\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

(v) Die Nullstellenmenge des Sinuses ist $\pi\mathbb{Z}$. Also hat der Sinus für jedes $k \in \mathbb{Z}$ auf $[(k-1), k]$ keinen Vorzeichenwechsel (Zwischenwertsatz). Folglich gilt

$$\begin{aligned}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin(t)|\, dt &= \left| \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sin(t) dt \right| = \left| - [\cos(t)]_{t=(k-1)\pi}^{t=k\pi} \right| \\ &= \left| (-1)^k - (-1)^{(k-1)} \right| = \left| (-1)^k + (-1)^k \right| = 2.\end{aligned}$$

(vi) Es gilt nach der Substitutionsregel

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{1}{t(1+\ln(t))} dt &= \int_1^e \underbrace{\frac{1}{t}}_{=g'(t)} \underbrace{\frac{1}{1+\underbrace{\ln(t)}_{g(t)}}}_{=f(g(t))} dt = \int_{g(1)}^{g(e)} f(x) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_{x=0}^1 = \ln(2).\end{aligned}$$

(vii) Es gilt nach der Regel der partiellen Integration

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \arcsin(t) dt &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \underbrace{1}_{=f'(t)} \underbrace{\arcsin(t)}_{=g(t)} dt = [t \arcsin(t)]_{t=0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt.\end{aligned}$$

Weiter gilt nach der Substitutionsregel

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \underbrace{2t}_{=g'(t)} \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{1-\overbrace{t^2}^{=g(t)}}}}_{=f(g(t))} dt = \int_{g(0)}^{g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2\sqrt{1-x}} dx \\ &= -\left[\sqrt{1-x}\right]_{x=0}^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Insgesamt also

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \arcsin(t) dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{4} + \left[\sqrt{1-t^2}\right]_{t=0}^{t=\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1.$$

(viii) Es gilt

$$\sin(t) = \frac{2\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}$$

für alle $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right] \subseteq \mathbb{R} \setminus \pi(2\mathbb{Z}+1)$. Folglich ist

$$\frac{1}{\sin(t)} = \frac{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}{2\tan\left(\frac{t}{2}\right)} \qquad \forall t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right].$$

Es gilt nach der Substitutionsregel

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{\sin(t)}dt &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}{2\tan\left(\frac{t}{2}\right)}dt \underset{\frac{dt}{ds}=\frac{2}{1+s^2}}{\overset{t=2\arctan(s)}{=}} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1+s^2}{2s}\cdot\frac{2}{1+s^2}ds \\ &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{s}ds = [\ln(s)]_{s=1}^{s=\sqrt{3}} = \frac{\ln(3)}{2}.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 80:

Wir halten zunächst fest, dass jeder Integrand auf dem jeweiligen Integrationsintervall stetig ist und deshalb auch integrierbar.

(i) Substitutionsregel liefert

$$\int_0^1 (1+2t)^3 dt \underset{\frac{dt}{ds}=\frac{1}{2}}{\overset{t=\frac{s-1}{2}}{=}} \frac{1}{2}\int_1^3 s^3 ds = \frac{1}{8}\left[s^4\right]_{s=1}^3 = \frac{81-1}{8} = 10.$$

(ii) Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}\int_1^e \underbrace{t}_{=f'(t)}\underbrace{\log(t)}_{=g(t)}dt &= \left[\frac{t^2}{2}\log(t)\right]_{t=1}^{t=e} - \int_1^e \frac{t^2}{2}\frac{1}{t}dt = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\int_1^e t dt = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}\left[t^2\right]_{t=1}^e \\ &= \frac{e^2+1}{4}.\end{aligned}$$

(iii) Die Technik des „Scharfen Hinsehens“™zusammen mit der Substitutionsregel liefert

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{t^3}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}dt &= \frac{1}{2}\int_1^2 \underbrace{\frac{\overbrace{t^2}^{=g(t)}}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}}_{=f(g(t))}\underbrace{2t}_{=g'(t)}dt = \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{x}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{1+x}{(1+x)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}dx = \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}dx \\ &\underset{\frac{dy}{dx}=1}{\overset{y=1+x}{=}} \frac{1}{2}\int_2^5 y^{-\frac{1}{2}} - y^{-\frac{3}{2}}dy = [\sqrt{y}]_{y=2}^5 + \left[\frac{1}{\sqrt{y}}\right]_{y=2}^5 \\ &= \sqrt{5}-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{5}}{5} - \frac{3\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

(iv) Für den Integranden gilt per Definition

$$\frac{1}{\sinh(t)\cosh(t)} = \frac{4}{(e^t-e^{-t})(e^t+e^{-t})} = \frac{4}{e^{2t}-e^{-2t}} \qquad \forall t>0.$$

Daher bietet es sich an, die Substitutionsregel zu verwenden. Man erhält

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\log(3)}{2}}^{\frac{\log(7)}{2}} \frac{1}{\sinh(t)\cosh(t)}dt &= \int_{\frac{\log(3)}{2}}^{\frac{\log(7)}{2}} \frac{4}{e^{2t}-e^{-2t}}dt \underset{\frac{dt}{ds}=\frac{1}{2s}}{\overset{t=\frac{\ln(s)}{2}}{=}} 2\int_3^7 \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s-\frac{1}{s}}ds = 2\int_3^7 \frac{1}{s^2-1}\mathrm{ds} \\
&= \int_3^7 \frac{2}{(s-1)(s+1)}\mathrm{ds} = \int_3^7 \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\mathrm{ds} \\
&= [\log(s-1)-\log(s+1)]_{s=3}^{s=7} = \left[\log\left(\frac{s-1}{s+1}\right)\right]_{s=3}^{s=7} \\
&= \log\left(\frac{3}{4}\right) - \log\left(\frac{1}{2}\right) = \log\left(\frac{3}{2}\right).
\end{aligned}$$

(v) Die Technik des „Scharfen Hinsehens“™zusammen mit der Substitutionsregel liefert

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{9-4t^2}}dt = -\frac{1}{8}\int_0^1 \frac{(-8t)}{\sqrt{9-4t^2}}dt = -\left[\frac{\sqrt{9-4t^2}}{4}\right]_{t=0}^1 = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{4}.$$

(vi) Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \underbrace{t}_{=g(t)} \cdot \underbrace{\cos(t)}_{=f'(t)}\, dt &\overset{\text{P.I.}}{=} [t\sin(t)]_{t=0}^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(t)dt = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + [\cos(t)]_{t=0}^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{\sqrt{2}\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{2}(\pi+4)-8}{8}.
\end{aligned}$$

(vii) Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\sqrt{1-t}}dt &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(t-1)+1}{\sqrt{1-t}}dt = -\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-t}dt + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t}}dt \\
&= \frac{2}{3}\left[(1-t)^{\frac{3}{2}}\right]_{t=0}^{\frac{1}{2}} - 2\left[\sqrt{1-t}\right]_{t=0}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{2}{3} + 2 - \sqrt{2} = \frac{8-5\sqrt{2}}{6}.
\end{aligned}$$

(viii) Substitutionsregel liefert

$$\int_{-\frac{\log(3)}{2}}^{\frac{\log(3)}{2}} \frac{e^t+3}{e^{2t}+1}dt \underset{\frac{dt}{ds}=\frac{1}{s}}{\overset{t=\ln(s)}{=}} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{s+3}{s^2+1}\cdot\frac{1}{s}\mathrm{ds} = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+s^2}\mathrm{ds} + 3\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{s(s^2+1)}\mathrm{ds}.$$

Das erste Integral ist

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+s^2}\mathrm{ds} = [\arctan(s)]_{s=\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}.$$

Für das zweite Integral beobachtet man (Partialbruchzerlegung)

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} \qquad \forall s \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

und folglich

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{s(s^2+1)} ds &= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{s} ds - \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{2s}{1+s^2} ds = [\ln(s)]_{s=\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \left[\ln(1+s^2)\right]_{s=\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \\ &= \ln(3) - \frac{1}{2} \left(2\ln(2) - 2\ln(2) + \ln(3)\right) = \frac{\ln(3)}{2}.\end{aligned}$$

Insgesamt folgt $\int_{-\frac{\log(3)}{2}}^{\frac{\log(3)}{2}} \frac{e^t+3}{e^{2t}+1} dt = \frac{\pi}{6} + \frac{3}{2} \ln(3)$.

□

http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm1phys2017w/