Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Michal Jex

WS2017/18
5.2.2018

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

14. Übungsblatt

Aufgabe 81:
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei

(i) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{2nx^2}{(1+n^3x^2)^2}$, bzw.

(ii) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{1+nx}$.

Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.
Hinweis: Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Kriterium über gleichmäßige Konvergenz, bzw. der Kriterium der Majoriezierte Konvergenz.

Aufgabe 82:
Berechnen Sie den Wert der folgenden Reihen

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$,

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^2 x^n$,

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$,

(v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)4^n}$,

(vi) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1}$.

Hinweis: Man kann die Potenzreihe innenhalb des Konvergenzradius ableiten oder integrieren.

Aufgabe 83:
Berechnen Sie näherungsweise das folgende Integral

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx$$

mit Hilfe der ersten drei Terme einer geschickt gewählten Taylorreihe. Schätzen Sie auch den Fehler bei dieser Berechnung ab.

— **Bitte wenden!** —

Aufgabe 84:

Untersuchen Sie die Konvergenz der uneigentlichen Integrale

(i) $\int_1^\infty \frac{1+\frac{1}{2}(\cos x)^{2018}}{x} dx$,

(ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right) dx$,

(iii) $\int_0^\infty e^{-x} \ln(1+x) dx$, sowie

(iv) $\int_0^\infty \frac{x \ln(x)}{\sinh(x)-x} dx$.

Aufgabe 85:

Untersuchen Sie die Konvergenz der uneigentlichen Integrale

(i) $\int_0^1 \frac{e^x}{x} dx$,

(ii) $\int_0^1 \frac{e^x-1}{x^2} dx$,

(iii) $\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln(x))^2} dx$, sowie

(iv) $\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}} dx$.

Aufgabe 86:

Berechnen Sie den Wert der folgenden Reihen

(i) $\sum_{n=0}^\infty \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$,

(ii) $\sum_{n=1}^\infty \frac{n^2+1}{(2n)!!} x^n$,

(iii) $\sum_{n=1}^\infty \frac{(n-1)^2}{2^{n-1}}$,

(iv) $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n+1)16^n}$,

(v) $\sum_{n=2}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2+n-2}$,

(vi) $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.

Hinweis: Man kann die Potenzreihe für $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n$ benutzen.

Aufgabe 87:

Finden Sie eine Reihe, die nur für $x \in [-2, 8)$ konvergent ist.

Erinnerung: Die Modulprüfung (Klausur) findet am Montag, den **05. März 2017** von **11:00 bis 13:00** Uhr statt. Bitte denken Sie daran, sich rechtzeitig im Online-Portal Campus-Management-für-Studierende dafür anzumelden. Anmeldeschluss ist Samstag, der **10. Februar 2017**. Weitere Informationen finden Sie auf der Homepage der Veranstaltung.

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgabe 81, 82, 83 und 84 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.