**Institut für Analysis**
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Michal Jex

WS2017/18
9.2.2018

# Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

## Lösungsvorschläge zum 14. Übungsblatt

### Aufgabe 81:

(i) Wir beobachten, dass für jedes $x \in [0,1]$ und jedes $n \in \mathbb{N}$

$$|f_n(x)| = \frac{1}{n^2}\left|\frac{2n^3x^2}{(1+n^3x^2)^2}\right| = \frac{1}{n^2}\left|g(n^3x^2)\right| \le \frac{1}{n^2}\|g\|_\infty\,,$$

wobei $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \frac{2y}{(1+y)^2}$. Wegen

$$\left|\frac{2y}{(1+y)^2}\right| = 1 - \frac{y^2+1}{(1+y)^2} \le 1 \qquad \forall y \in [0,\infty),$$

ist $\|g\|_\infty \le 1$. Also ist $f_n \rightrightarrows 0$ auf $[0,1]$ für $n \to \infty$. $f_n(x)$ konvergiert gleichmäßig deshalb können wir das Integral und das Limes wechseln und gilt

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = 0.$$

(ii) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{1}{1+nx}dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\ln(1+nx)\right]_{x=0}^1 = \lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{\ln(1+n)}^{\to\infty}}{\underbrace{n}_{\to\infty}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{1+n}}{\underbrace{1}_{\neq 0}} = 0.$$

□

### Aufgabe 82:

(i) Es gilt

$$s(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \to (s(x))' = \sum_{n=0}^\infty x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}\,,$$
$$s(x) = \int \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{1-x} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + c\,.$$

Das Konstant $c$ ist 0, weil $s(0) = 0 \overset{!}{=} \frac{1}{2}\ln\frac{1}{1} + c$. Die Konvergenzradius von $s(x)$ und $\sum_{n=0}^\infty x^{2n}$ ist $R = 1$ deshalb können wir Reihe integrieren und ableiten für $x \in (-1,1)$.

(ii) Es gilt

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1} \to \int s(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = w(x) \to \int \frac{w(x)}{x}dx=\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}\,,$$
$$\frac{w(x)}{x}=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{1-x}+\frac{x}{(1-x)^2}\to w(x)=\frac{x}{(1-x)^2}\,,$$
$$s(x)=\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{2x}{(1-x)^3}=\frac{1+x}{(1-x)^3}\,.$$

Die Konvergenzradius von $s(x)$ und $w(x)$ ist $R=1$ deshalb können wir Reihen integrieren und ableiten für $x\in(-1,1)$.

(iii) Es gilt

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2x^n \to \int \frac{s(x)}{x}dx=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^n = w(x)\,,$$
$$\int \frac{w(x)}{x}dx=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n=-\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^n=\frac{x}{1+x}\,,$$
$$\frac{w(x)}{x}=\left(\frac{x}{1+x}\right)'=\frac{1}{1+x}-\frac{x}{(1+x)^2}\to w(x)=\frac{x}{(1+x)^2}\,,$$
$$s(x)=x\left(\frac{x}{(1+x)^2}\right)'=\frac{x}{(1+x)^2}+\frac{2x}{(1+x)^3}=x\frac{1-x}{(1+x)^3}\,.$$

Die Konvergenzradius von $s(x)$ und $w(x)$ ist $R=1$ deshalb können wir Reihen integrieren und ableiten für $x\in(-1,1)$.

(iv) Es gilt

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nx^n \to \int s(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}=x^2w(x) \to \int w(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty} x^n=\frac{1}{1-x}\,,$$
$$w(x)=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}\to x^2w(x)=\frac{x^2}{(1-x)^2}\,,$$
$$s(x)=\left(\frac{x^2}{(1-x)^2}\right)'=\frac{2x}{(1-x)^2}+\frac{2x^2}{(1-x)^3}=\frac{2x}{(1-x)^3}\,.$$

Die Konvergenzradius von $s(x)$ und $w(x)$ ist $R=1$ deshalb können wir Reihen integrieren und ableiten für $x\in(-1,1)$.

(v) Es gilt

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1}\to (xs(x))'=\sum_{n=1}^{\infty}(-x^2)^n=\frac{-x^2}{1+x^2}\,,$$
$$xs(x)=-\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=-\int 1dx+\int\frac{1}{1+x^2}dx=-x+\arctan x+c\,.$$

Das Konstant $c$ ist 0, weil $s(0) = 0 \stackrel{!}{=} -0 + \arctan 0 + c$. Die Konvergenzradius von $s(x)$ und $\sum_{n=1}^{\infty}(-x^2)^n$ ist $R = 1$ deshalb können wir Reihe integrieren und ableiten für $x \in (-1, 1)$. Dann haben wir

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)2^{2n}} = s\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + 2\arctan\left(\frac{1}{2}\right).$$

(vi) Es gilt

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-1} - \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-1} - \frac{1}{2}\sum_{n=4}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

□

**Aufgabe 83:**

Die Taylorpolynome ist

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{\xi^6}{6}$$

mit $\xi \in (0, x)$. Der Fehler der alternierende Reihe $\sum(-1)^n a_n$ kann man als erste Term von dem Rest der Reihe schreiben falls $a_n$ eine fallende Nullfolge ist. Dann haben wir

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx \approx \int_0^{\frac{1}{4}} 1 - x^2 + \frac{x^4}{2}dx = \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10}\right]_0^{\frac{1}{4}} = \frac{7523}{30720}$$

Der Fehler kann man approximieren als

$$0 \leq \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\xi^6}{6}dx \leq \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{x^6}{6}dx = \left[\frac{x^7}{42}\right]_0^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{688128}.$$

□

**Aufgabe 84:**

(i) Für alle $x \in [1, \infty)$ gilt $1 + \frac{1}{2}\cos^{2018}(x) \geq 1$ und folglich $\frac{1+\frac{1}{2}\cos^{2018}(x)}{x} \geq \frac{1}{x} > 0$. Ferner ist

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty}[\ln(x)]_{x=1}^b = \lim_{b\to\infty}\ln(b) = \infty.$$

Nach dem Minorantenkriterium für uneigentliche Integrale ist auch das uneigentliche Integral $\int_1^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}\cos^{2018}(x)}{x}dx$ divergent.

(ii) Für jedes $x \in (0, \pi)$ gilt

$$\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin(x)}{x\sin(x)} = \frac{x - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}}{x\sin(x)} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!}x^{2k-1}}{\frac{\sin(x)}{x}}.$$

Alle vorkommenden Potenzreihen haben unendlichen Konvergenzradius. Die Funktion $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ lässt sich stetig auf $\mathbb{R}$ fortsetzen, wobei die Fortsetzung in 0 keine Nullstelle hat. Folglich ist das Integral bei 0 nicht uneigentlich.

(iii) Für jedes $b > 0$ gilt

$$\int_0^b \underbrace{e^{-x}}_{f'(x)} \underbrace{\ln(1+x)}_{g(x)}\, dx \overset{\text{Part. Int.}}{=} -\left[e^{-x}\ln(1+x)\right]_{x=0}^b + \int_0^b e^{-x}\frac{1}{1+x}dx$$

$$= \quad -\frac{\log(1+b)}{e^b} + \int_0^b e^{-x}\frac{1}{1+x}dx.$$

Wegen

$$\lim_{b\to\infty} \frac{\log(1+b)}{\underbrace{e^b}_{\to\infty}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{b\to\infty} \frac{1}{(1+b)\underbrace{e^b}_{\neq 0}} = 0$$

ist das uneigentliche Integral $\int_0^\infty e^{-x}\log(1+x)dx$ genau dann konvergent, wenn das uneigentliche Integral $\int_0^\infty e^{-x}\frac{1}{1+x}dx$ konvergent ist. Dieses ist tatsächlich der Fall nach dem Majorantenkriterium. Für alle $0 \le x < \infty$ gilt

$$e^{-x}\frac{1}{1+x} \le e^{-x}, \text{ und } \int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}dx \lim_{b\to\infty} -\left[e^{-x}\right]_{x=0}^b = 1 - \lim_{b\to\infty} e^{-b} = 1.$$

(iv) Wir untersuchen den Integranden „in der Nähe der unteren Grenze“. Es gilt

$$\log(x) \le \log\left(\frac{1}{e}\right) = -1$$

für alle $0 < x \le \frac{1}{e}$. Ferner folgt aus der Potenzreihendarstellung des sinh

$$0 < \sinh(x) - x \quad = \quad \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} - x = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$$\overset{\text{Index-Shift}}{=} \quad \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+3)!}x^{2n+3} = x^3 \underbrace{\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+3)!}x^{2n}}_{=:h(x)>0}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Die durch den obigen Ausdruck definierte Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ist als Potenzreihe stetig und nimmt auf $\left[0, \frac{1}{e}\right]$ ihr Maximum $M$ an. Folglich gilt

$$-\frac{x\ln(x)}{\sinh(x) - x} \ge \frac{x\ln(e)}{x^3 h(x)} \ge \frac{1}{x^2 M}$$

für alle $0 < x \le \frac{1}{e}$. Wegen

$$\int_a^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x^2 M}dx = -\frac{1}{M}\left[\frac{1}{x}\right]_{x=a}^{\frac{1}{e}} = \frac{1}{M}\left(\frac{1}{a} - e\right) \xrightarrow{a\to 0+} \infty$$

ist das uneigentliche Integral $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x^2 M}dx$ divergent. Nach dem Minorantenkriterium ist dann auch das uneigentliche Integral

$$-\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{x\ln(x)}{\sinh(x) - x}dx$$

divergent. Nach Definition ist das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{x\ln(x)}{\sinh(x) - x}dx$$

ebenfalls divergent.

$\square$

**Aufgabe 85:**

(i) Das Integral ist uneigentlich bei 0. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{e^x}{x} &\geq \frac{e^0}{x} = \frac{1}{x} \qquad \forall x \in (0,1] \quad \text{und} \\ \int_0^1 \frac{1}{x} &= \lim_{a\to 0+} \int_a^1 \frac{1}{x} = \lim_{a\to 0+} [\ln(x)]_{x=a}^1 = -\lim_{a\to 0+} \ln(a) = \infty.\end{aligned}$$

Folglich ist $\int_0^1 \frac{e^x}{x} dx$ divergent nach dem Minorantenkriterium.

(ii) Das Integral ist uneigentlich bei 0. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{e^x-1}{x^2} &= \frac{1}{x^2}\left(\sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k!} - 1\right) = \frac{1}{x^2}\sum_{k=1}^\infty \frac{x^k}{k!} \overset{\text{Index-}}{\underset{\text{shift}}{=}} \frac{1}{x^2}\sum_{k=0}^\infty \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{1}{x}\sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{(k+1)!} \\ &= \frac{1}{x}\left(1 + \sum_{k=1}^\infty \underbrace{\frac{x^k}{(k+1)!}}_{\geq 0}\right) \geq \frac{1}{x} \qquad \forall x \in (0,1] \quad \text{und} \\ \int_0^1 \frac{1}{x} &= \lim_{a\to 0+} \int_a^1 \frac{1}{x} = \lim_{a\to 0+} [\ln(x)]_{x=a}^1 = -\lim_{a\to 0+} \ln(a) = \infty.\end{aligned}$$

Folglich ist $\int_0^1 \frac{e^x-1}{x^2} dx$ divergent nach dem Minorantenkriterium.

(iii) Für jedes $b > 2$ gilt

$$\int_2^b \frac{1}{x(\ln(x))^2} dx \underset{dx=xdys}{\overset{x=e^y}{=}} \int_{\ln(2)}^{\ln(b)} \frac{1}{y^2} dy = -\left[\frac{1}{y}\right]_{y=\ln(2)}^{\ln(b)} = \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(b)}.$$

Folglich ist das uneigentliche Integral $\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln(x))^2} dx$ konvergent und es gilt

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln(x))^2} dx = \lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{1}{x(\ln(x))^2} dx = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(b)}\right) = \frac{1}{\ln(2)}.$$

(iv) Für alle $0 < x \leq 1$ gilt $x^2 < x < \sqrt{x}$. Damit folgt

$$0 < \left|\frac{1}{2\sqrt{x} - x^2}\right| = \frac{1}{\sqrt{x} + \underbrace{(\sqrt{x} - x^2)}_{>0}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$$

für alle $0 < x \leq 1$. Sei $0 < a < 1$. Es gilt

$$\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\left[\sqrt{x}\right]_{x=a}^1 = 2 - 2\sqrt{a} \xrightarrow{a\to 0+} = 2.$$

Also ist das uneigentliche Integral $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ konvergent. Nach dem Majorantenkriterium ist auch das Integral $\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}-x^2} dx$ (absolut) konvergent.

□

## Aufgabe 86:

(i) Wir nehmen das Folgende

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+}}{n!} + C = xe^{x^2} + C\,.$$

Dann

$$(xe^{x^2} + C)' = e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}\,.$$

Wir müssen zeigen, dass wir die Potenzreihen ableiten und integrieren können. Es gilt, weil die Konvergenzradius aller Reihen $R = \infty$ sind.

(ii) Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+1)x^n}{(2n)!!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+1)}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n\,,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} y^n = e^y - 1\,,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} y^n = y \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} y^{n-1} \to \int \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} y^{n-1} dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} y^n = ye^y\,,$$

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} y^n}{y} = (ye^y)' = e^y + ye^y \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} y^n = ye^y + y^2 e^y\,,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+1)x^n}{(2n)!!} = e^{\frac{x}{2}} - 1 + \frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}} + \frac{x^2}{4} e^{\frac{x}{2}}$$

Wir müssen zeigen, dass wir die Potenzreihen ableiten und integrieren können. Es gilt, weil die Konvergenzradius aller Reihen $R = \infty$ sind.

(iii) Es gilt

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n \to \int \frac{s(x)}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = w(x) \to \int \frac{w(x)}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\,,$$

$$\frac{w(x)}{x} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \to w(x) = \frac{x}{(1-x)^2}\,,$$

$$s(x) = x \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{2x^2}{(1-x)^3} = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}\,.$$

Die Konvergenzradius von $s(x)$ und $w(x)$ ist $R = 1$ deshalb können wir Reihen integrieren und ableiten für $x \in (-1, 1)$. Dann haben wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n = s\left(\frac{1}{2}\right) = 6$$

(iv) Es gilt

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1} \to (xs(x))' = \sum_{n=1}^{\infty} (x^2)^n = \frac{x^2}{1-x^2}\,,$$

$$xs(x) = \int \frac{x^2}{1-x^2}dx = \int \frac{1-1+x^2}{1-x^2}dx = \int -1dx + \int \frac{1}{1-x^2}dx = -x + \operatorname{arctanh} x + c\,.$$

Das Konstant $c$ ist 0, weil $s(0) = 0 \overset{!}{=} -0 + \operatorname{arctanh} 0 + c$. Die Konvergenzradius von $s(x)$ und $w(x)$ ist $R = 1$ deshalb können wir Reihen integrieren und ableiten für $x \in (-1, 1)$. Dann haben wir auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)4^{2n}} = -1 + 4 \operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{4}\right)\,.$$

(v) Die Reihe konvergiert mit Hilfe der Leibniz Kriterium. Es gilt

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \to (s(x))' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x} \to s(x) = \int \frac{1}{1-x}dx = -\ln(1-x) + c\,.$$

Das Konstant $c$ ist gleich 0, weil $s(0) = 0 \overset{!}{=} -0 - \ln(1-0) + c = c$. Die Konvergenzradius von $s(x)$ und $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ ist $R = 1$ deshalb können wir Reihen integrieren und ableiten für $x \in (-1, 1)$. Dann haben wir auch

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2+n-2)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2)(n-1)} = -\frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2} + \frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-1} =$$

$$\frac{1}{3}\left(-\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\right) = -\frac{1}{3}\left(2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} - \sum_{n=1}^{3} \frac{(-1)^n}{n}\right) = -\frac{1}{3}\left(-2\ln 2 + \frac{5}{18}\right)\,.$$

(vi) Es gilt

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}\ldots\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!} x^n =$$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\frac{1}{2}\frac{3}{2}\ldots\frac{2n-1}{2}}{n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n\,.$$

Dann haben wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = (2)^{-\frac{1}{2}} - 1 = \frac{\sqrt{2}-2}{2}\,.$$

□

## Aufgabe 87:

Wir finden eine Potenzreihe $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 3$. Dann haben wir die Konvergenzradius $R = 5$ und auch $|\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-5)^n| = \infty$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(5)^n < \infty$. Diese Eigenschaften hat die Folge $a_n = \frac{1}{n5^n}$. □

http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm1phys2017w/