Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

WS 2018/2019
18.10.2018

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Übung)

Seien A und B beliebige Aussagen. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen wahr sind.

a) $A \vee \neg A$.

b) $A \Leftrightarrow \neg(\neg A)$.

c) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)]$.

d) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$.

e) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$.

f) (Fallunterscheid.) $[(A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)] \Leftrightarrow B$.

g) (Kontraposition) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$.

h) (Widerspruchsbeweis) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$.

Lösungsvorschlag

Da alle logischen Verknüpfungen über Wahrheitstabellen definiert sind, arbeiten wir mit diesen, um alle Aussagen rigoros zu beweisen, selbst wenn einige natürlich "logisch" erscheinen. Wir beginnen immer mit allen vier Möglichkeiten für den Wahrheitsgehalt von A und B, um danach in Kleinstschritten den Wahrheitsgehalt der auftretenden Verknüpfungen zu bestimmen.

a)

A	W	F
$\neg A$	F	W
$A \vee \neg A$	W	W

b)

A	W	F
$\neg A$	F	W
$\neg(\neg A)$	W	F
$A \Leftrightarrow \neg(\neg A)$	W	W

c)

A	W	W	F	F
B	W	F	W	F
$A \Leftrightarrow B$	W	F	F	W
$A \Rightarrow B$	W	F	W	W
$B \Rightarrow A$	W	W	F	W
$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	W	F	F	W
$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)]$	W	W	W	W

d)

A	W	W	F	F
B	W	F	W	F
$A \wedge B$	W	F	F	F
$\neg(A \wedge B)$	F	W	W	W
$\neg A$	F	F	W	W
$\neg B$	F	W	F	W
$\neg A \vee \neg B$	F	W	W	W
$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$	W	W	W	W

e)

A	W	W	F	F
B	W	F	W	F
$A \vee B$	W	W	W	F
$\neg(A \vee B)$	F	F	F	W
$\neg A$	F	F	W	W
$\neg B$	F	W	F	W
$\neg A \wedge \neg B$	F	F	F	W
$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$	W	W	W	W

f)

A	W	W	F	F
B	W	F	W	F
$A \Rightarrow B$	W	F	W	W
$\neg A$	F	F	W	W
$\neg A \Rightarrow B$	W	W	W	F
$[(A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)]$	W	F	W	F
$[(A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)] \Leftrightarrow B$	W	W	W	W

g)

A	W	W	F	F
B	W	F	W	F
$A \Rightarrow B$	W	F	W	W
$\neg A$	F	F	W	W
$\neg B$	F	W	F	W
$\neg B \Rightarrow \neg A$	W	F	W	W
$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$	W	W	W	W

h)

A	W	W	F	F
B	W	F	W	F
$A \Rightarrow B$	W	F	W	W
$\neg B$	F	W	F	W
$A \wedge \neg B$	F	W	F	F
$\neg(A \wedge \neg B)$	W	F	W	W
$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$	W	W	W	W

Aufgabe 2 (Tutorium)

a) Seien A, B und C beliebige Aussagen. Stellen Sie für die folgenden Aussagen Wahrheitstafeln auf, um zu entscheiden, wann diese wahr sind. Ist (ii) wahr für die Aussagen A: "5 ist eine Primzahl.", B: "Vladimir Putin ist Präsident der USA." und C: "Die Hauptstadt von Norwegen ist Stockholm."?

(i) $(A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow \neg B)$.

(ii) $[(A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C)] \Rightarrow [(A \vee B) \Rightarrow C]$.

b) Formalisieren Sie die folgenden Aussagen, sodass sie aussehen wie in **a)**. Danach negieren und vereinfachen Sie die Aussage, um sie zuletzt wieder in Umgangssprache zu übersetzen.

(i) Die Physikstudenten geben nicht auf, solange sie die Aussagen nicht sowohl negiert als auch übersetzt haben.

(ii) Es gibt einen Dozenten, der allen Studenten unsympathisch ist oder dem alle Studenten unsympathisch sind.

Lösungsvorschlag

a) Wir gehen vor wie in **Aufgabe 1** und lesen am Ende ab, wann die Aussage wahr ist.

(i)

A	W	W	F	F
B	W	F	W	F
$\neg B$	F	W	F	W
$A \Rightarrow B$	W	F	W	W
$A \Rightarrow \neg B$	F	W	W	W
$(A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow \neg B)$	W	W	W	W

Mit der logischen Definition der Implikation ist es also tatsächlich so, dass aus jeder beliebigen Aussage jede beliebige andere Aussage oder deren Verneinung gefolgert werden kann.

(ii)

A	W	W	W	W	F	F	F	F
B	W	W	F	F	W	W	F	F
C	W	F	W	F	W	F	W	F
$A \Rightarrow C$	W	F	W	F	W	W	W	W
$B \Rightarrow C$	W	F	W	W	W	F	W	W
$(A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C)$	W	F	W	W	W	W	W	W
$A \vee B$	W	W	W	W	W	W	F	F
$(A \vee B) \Rightarrow C$	W	F	W	F	W	F	W	W
$[(A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C)] \Rightarrow [(A \vee B) \Rightarrow C]$	W	W	W	F	W	F	W	W

Die Aussage ist demnach genau dann falsch, wenn C und entweder A oder B falsch sind, was bei den gegebenen Beispielen (offiziell) der Fall ist, womit (ii) hier nicht wahr ist.

b) (i) Wir benutzen die Aussagen A: "Die Physikstudenten geben auf.", B: "Die Physikstudenten haben die Aussagen negiert." und C: "Die Physikstudenten haben die Aussagen übersetzt." Damit lautet die logische Schreibweise der gegebenen Aussage

$$\neg(B \wedge C) \Rightarrow \neg A.$$

Die Negation dieser Aussage lautet (wobei wir zum Vereinfachen **Aufgabe 1 b)** und die Negation von **h)** verwenden)

$$\neg[\neg(B \wedge C) \Rightarrow \neg A] \Leftrightarrow [\neg(B \wedge C) \wedge \neg(\neg A)] \Leftrightarrow [(\neg B \vee \neg C) \wedge A]$$

In Umgangssprache übersetzt ergibt sich: "Die Physikstudenten geben auf, obwohl sie die Aussagen nicht negiert oder nicht übersetzt haben."

(ii) Wir verwenden die Aussageformen $A(d,s)$: "Dozent d mag den Studenten s." und $B(d,s)$: "Student s mag den Dozenten d." Die gegebene Aussage übersetzt sich zu

$$\exists d : (\forall s : \neg A(d,s)) \vee (\forall s : \neg B(d,s)).$$

Negieren wir diese Aussage und verwenden **Aufgabe 1 e)** und **b)** sowie die Regeln zum Negieren von Quantoren aus der Vorlesung, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\neg[\exists d : (\forall s : \neg A(d,s)) \vee (\forall s : \neg B(d,s))] &\Leftrightarrow \forall d : \neg[(\forall s : \neg A(d,s)) \vee (\forall s : \neg B(d,s))]\\ &\Leftrightarrow \forall d : \neg(\forall s : \neg A(d,s)) \wedge \neg(\forall s : \neg B(d,s))\\ &\Leftrightarrow \forall d : [\exists s : \neg(\neg A(d,s))] \wedge [\exists s : \neg(\neg B(d,s))]\\ &\Leftrightarrow \forall d : (\exists s : A(d,s)) \wedge (\exists s : B(d,s)).\end{aligned}$$

Dies bedeutet wiederum "Zu jedem Dozenten gibt es einen Studenten, den er sympathisch findet und einen Studenten, der ihn sympathisch findet." (nicht notwendigerweise derselbe Student!)

Aufgabe 3 (Übung)

a) Beweisen Sie die zweite *De Morgansche Regel*: Für beliebige Mengen M_1, M_2 und Q gilt

$$Q \setminus (M_1 \cap M_2) = (Q \setminus M_1) \cup (Q \setminus M_2).$$

Hinweis: Die De Morganschen Regeln gelten auch für mehr als zwei Mengen M_i, $i \in I$, wobei I eine beliebige Indexmenge ist.

b) Bestimmen Sie alle Elemente der Menge $Pot(Pot(Pot(\emptyset)))$.

c) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $n\mathbb{Z} := \{nz : \ z \in \mathbb{Z}\}$. Zeigen Sie, dass durch

$$zRw :\Leftrightarrow (z - w \in n\mathbb{Z})$$

für $z, w \in \mathbb{Z}$ eine Äquivalenzrelation R gegeben ist. Bestimmen Sie die Äquivalenzklasse $[0]_R$. Wie viele verschiedene Äquivalenzklassen von R gibt es?

Lösungsvorschlag

a) Wie beim Beweis der ersten De Morganschen Regel in der Vorlesung zeigen wir, dass die linke Menge in der Rechten enthalten ist und umgekehrt, um die Mengengleichheit zu zeigen.

$\subseteq$: Sei $x \in Q \setminus (M_1 \cap M_2)$. Dann ist $x \in Q$ und x nicht gleichzeitig in beiden Mengen M_1 und M_2. Somit ist x in Q und nicht in M_1 oder in Q und nicht in M_2, also $x \in (Q \setminus M_1) \cup (Q \setminus M_2)$.

$\supseteq$: Sei $x \in (Q \setminus M_1) \cup (Q \setminus M_2)$. Somit ist x in Q und gleichzeitig nicht in M_1 oder nicht in M_2. Also ist x in Q und nicht in beiden Mengen M_1 und M_2, also nicht in $M_1 \cap M_2$. Folglich ist $x \in Q \setminus (M_1 \cap M_2)$.

b) Die Potenzmenge einer Menge beinhaltet alle ihre Teilmengen. Wir bemerken, dass die leere Menge eine Teilmenge jeder Menge ist. Somit ergibt sich

$$Pot(\emptyset) = \{\emptyset\}.$$

Nun haben wir eine Menge, die genau eine Menge beinhaltet, nämlich die leere Menge. Alle Teilmengen dieser Menge sind diese eine Menge und wieder die leere Menge, womit

$$Pot(Pot(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}.$$

Nun beinhaltet die Menge genau zwei Mengen, die beides Teilmengen sind. Hinzu kommt wieder die leere Menge und die Menge, die beide Mengen umfasst. Deshalb ergibt sich schließlich

$$Pot(Pot(Pot(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}.$$

Hinweis: Die Potenzmenge $Pot(M)$ einer Menge M hat immer $2^{|M|}$ Elemente, wobei $|M|$ die Anzahl der Elemente in M ist.

c) Wir zeigen, dass die Relation reflexiv, transitiv und symmetrisch ist. Sei $n \in \mathbb{N}$ fest.

Reflexivität: Für $z \in \mathbb{Z}$ gilt zRz, da $z - z = 0 \in n\mathbb{Z}$.
Transitivität: Seien $z, w, v \in \mathbb{Z}$ mit zRw und wRv. Also existieren ganze Zahlen $k, l \in \mathbb{Z}$ mit

$$z - w = n \cdot k, \qquad w - v = n \cdot l$$

Somit gilt $z - v = (z - w) + (w - v) = n \cdot k + n \cdot l = n \cdot (k + l) \in n\mathbb{Z}$, also zRv.
Symmetrie: Seien $z, w \in \mathbb{Z}$ mit zRw. Also existiert eine ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$ mit $z - w = n \cdot k$. Somit gilt $w - z = n \cdot (-k) \in n\mathbb{Z}$, also wRz.

Insgesamt haben wir also gezeigt, dass R eine Äquivalenzrelation ist. Die Äquivalenzklasse $[0]_R$ ist nun die Menge aller ganzen Zahlen, die in Relation zu 0 steht, also

$$[0]_R = \{z \in \mathbb{Z} : z \in n\mathbb{Z}\} = n\mathbb{Z} = \{\ldots, -2n, -n, 0, n, 2n, \ldots\}.$$

$[0]_R$ beinhaltet also jede n-te ganze Zahl und insbesondere die Null. Analog enthält $[k]_R$ jede n-te ganze Zahl und insbesondere die Zahl k. Somit wiederholen sich die entstandenen Mengen alle n Schritte, zum Beispiel $[n]_R = [0]_R$. Deshalb existieren n verschiedene Äquivalenzklassen von R.

Aufgabe 4 (Tutorium)

a) Seien M_1 und M_2 beliebige Mengen. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen.

(i) $M_1 \subseteq M_2$, (ii) $M_1 \cap M_2 = M_1$, (iii) $M_1 \cup M_2 = M_2$.

b) Entscheiden Sie, welche der folgenden Relationen R Äquivalenz- bzw. Ordnungsrelationen sind. Dabei seien M und N nichtleere Mengen sowie (z_1, n_1) und (z_2, n_2) Elemente aus $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.

(i) $MRN :\Leftrightarrow (M \subseteq N)$. (ii) $MRN :\Leftrightarrow (M \cap N \neq \emptyset)$.

(iii) $(z_1, n_1)R(z_2, n_2) :\Leftrightarrow z_1 n_2 = z_2 n_1$.

Lösungsvorschlag

a) Wir wollen zeigen, dass

$$\text{(i)} \Leftrightarrow \text{(ii)} \Leftrightarrow \text{(iii)}.$$

Nach **Aufgabe 1 c)** ist dies gleichbedeutend damit, die vier Implikationen (i) $\Rightarrow$ (ii), (ii) $\Rightarrow$ (i), (ii) $\Rightarrow$ (iii) und (iii) $\Rightarrow$ (ii) zu beweisen. Die Alternative dazu, die wir hier durchführen werden, ist der so genannte **Ringschluss**. Wir beweisen

$$\text{(i)} \Rightarrow \text{(ii)} \Rightarrow \text{(iii)} \Rightarrow \text{(i)}.$$

Jede der vier verlangten Implikationen kann nun durch eine oder mehrere so bewiesene Implikationen gezeigt werden. Zum Beispiel gilt (iii) $\Rightarrow$ (ii) wegen (iii) $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (ii). Einerseits ersparen wir uns so quantitativ eine Implikation (drei statt vier), andererseits kann es vorkommen, dass eine Implikation wie (iii) $\Rightarrow$ (ii) schwieriger zu beweisen ist als die Implikationen, die wir tatsächlich beweisen beim Ringschluss.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $M_1 \subseteq M_2$, also gilt für jedes $x \in M_1$ auch $x \in M_2$. Die Mengengleichheit in (ii) zeigen wir wieder, indem wir beide Inklusionen zeigen.
Sei $x \in M_1 \cap M_2$. Dann gilt $x \in M_1$ und $x \in M_2$, also insbesondere $x \in M_1$. Sei nun $x \in M_1$. Dann

ist nach Voraussetzung auch $x \in M_2$ und damit $x \in M_1 \cap M_2$.
(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei $M_1 \cap M_2 = M_1$. Sei $x \in M_2$. Dann gilt sofort $x \in M_1 \cup M_2$, da hierfür nur $x \in M_1$ oder $x \in M_2$ gelten muss. Sei nun $x \in M_1 \cup M_2$. Ist $x \in M_2$, dann ist nichts zu zeigen. Ist $x \in M_1$, dann ist nach Voraussetzung $x \in M_1 \cap M_2$, also insbesondere $x \in M_2$.
(iii) $\Rightarrow$ (i): Sei $M_1 \cup M_2 = M_2$. Sei $x \in M_1$. Dann ist insbesondere $x \in M_1 \cup M_2$, was nach Voraussetzung M_2 ist, also $x \in M_2$ und somit $M_1 \subseteq M_2$.

b) (i) R ist eine Ordnungsrelation.
Reflexivität: Für eine beliebige Menge M gilt $M \subseteq M$.
Transitivität: Seien M, N und P Mengen mit MRN und NRP, also $M \subseteq N$ und $N \subseteq P$. Sei $x \in M$. Dann gilt nach der ersten Inklusion $x \in N$ und damit nach der zweiten Inklusion $x \in P$. Also gilt $M \subseteq P$, also MRP.
Antisymmetrie: Seien M und N Mengen mit MRN und NRM, also $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$. Per Definition gilt also $M = N$.

(ii) R ist weder Ordnungs- noch Äquivalenzrelation, denn R ist nicht Transitiv. Aus $M \cap N \neq \emptyset$ und $N \cap P \neq \emptyset$ folgt nicht automatisch $M \cap P \neq \emptyset$. Beispiel: $M = \{1,2\}$, $N = \{2,3\}$, $P = \{3,4\}$.

(iii) R ist eine Äquivalenzrelation.
Reflexivität: Für ein beliebiges $(z,n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ gilt $(z,n)R(z,n)$ wegen der trivialen Gleichheit $z \cdot n = z \cdot n$.
Transitivität: Seien $(z_1,n_1),(z_2,n_2),(z_3,n_3) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ mit $(z_1,n_1)R(z_2,n_2)$ und $(z_2,n_2)R(z_3,n_3)$, also $z_1n_2 = z_2n_1$ und $z_2n_3 = z_3n_2$. Dividieren wir auf die erste Gleichung durch n_1n_2 und die zweiten durch n_2n_3, so erhalten wir

$$\frac{z_1}{n_1} = \frac{z_2}{n_2} = \frac{z_3}{n_3}.$$

Nun benutzen wir die Gleichheit des ersten und dritten Terms und multiplizieren diese mit n_1n_3, womit wir $z_1n_3 = z_3n_1$, also $(z_1,n_1)R(z_3,n_3)$.
Symmetrie: Seien $(z_1,n_1),(z_2,n_2) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ mit $(z_1,n_1)R(z_2,n_2)$, also $z_1n_2 = z_2n_1$. Drehen wir die Gleichung um, so sehen wir sofort, dass $(z_2,n_2)R(z_1,n_1)$.

Aufgabe 5 (Übung)

Es seien X, Y und Z Mengen sowie $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen, deren Komposition wir mit $g \circ f =: h : X \to Z$ bezeichnen.

a) Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Sind f und g injektiv/surjektiv/bijektiv, so ist auch h injektiv/surjektiv/bijektiv.

(ii) Ist h surjektiv, so ist auch g surjektiv.

(iii) Ist h injektiv, so ist auch f injektiv.

b) Widerlegen Sie die folgenden Aussagen durch je ein Gegenbeispiel.

(i) Ist h injektiv, so ist auch g injektiv.

(ii) Ist h surjektiv, so ist auch f surjektiv.

Lösungsvorschlag

a) (i) Wir beginnen mit der Injektivität. Seien dazu $x_1, x_2 \in X$ mit $h(x_1) = h(x_2)$. Dies bedeutet $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Da g injektiv ist, folgt $f(x_1) = f(x_2)$. Da f injektiv ist, folgt $x_1 = x_2$. Somit ist h injektiv.

Für die Surjektivität sei $z \in Z$. Da g surjektiv ist, existiert ein $y \in Y$ mit $g(y) = z$. Da f surjektiv ist, existiert ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Damit gilt $h(x) = g(f(x)) = g(y) = z$, womit h surjektiv ist.
Sind f und g bijektiv, so sind sie insbesondere injektiv und surjektiv, womit nach dem bisher bewiesenen auch h injektiv und surjektiv ist. Somit ist h bijektiv.

(ii) Sei $z \in Z$. Da h surjektiv ist, existiert ein $x \in X$ mit $h(x) = z$, also $g(f(x)) = z$. Damit haben wir also mit $y := f(x)$ ein Element aus Y gefunden mit $g(y) = z$. Somit ist g surjektiv.

(iii) Seien $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Dann gilt $h(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = h(x_2)$. Da h injektiv ist, folgt $x_1 = x_2$, also ist f injektiv.

b) Sei $X = Z = \{1\}$, $Y = \{1,2\}$, $f(1) = h(1) = 1$, $g(1) = g(2) = 1$.

(i) h ist injektiv, da im Definitionsbereich sowieso nur ein Element liegt. g ist nicht injektiv, da beide Elemente aus Y auf denselben Wert im Wertebereich, nämlich 1, abgebildet werden.

(ii) h ist surjektiv, da alle Elemente im Wertebereich erreicht werden. f ist nicht surjektiv, da kein Urbild von 2 unter f existiert, $f(X) = \{1\} \neq \{1,2\} = Y$.

Aufgabe 6 (Tutorium)

a) Seien $M_1 := \{1,2,4\}$ und $M_2 := \{3,5,7,11\}$. Geben Sie, wenn möglich, eine injektive, eine surjektive und eine bijektive Abbildung von M_1 nach M_2 bzw. von M_2 nach M_1 an und begründen Sie andernfalls, warum eine solche nicht existiert. Was müssten zwei endliche Mengen erfüllen, damit eine bijektive Abbildung zwischen Ihnen existiert?

b) Zeigen Sie, dass die Funktion f, gegeben durch

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0,1\}, \qquad f(x) = 1 + \frac{x}{1-x},$$

bijektiv ist.

Lösungsvorschlag

a) Eine injektive Abbildung muss alle Element des Definitionsbereichs auf unterschiedliche Elemente im Bildbereich abbilden. Bei endlichen Mengen funktioniert dies genau dann, wenn der Bildbereich mindestens so viele Elemente hat wie der Definitionsbereich. Deshalb gibt es keine injektive Abbildung von M_2 nach M_1. Eine injektive Abbildung von M_1 nach M_2 ist zum Beispiel gegeben durch

$$f(1) = 3, f(2) = 5, f(4) = 7.$$

Bei einer surjektiven Abbildung das Bild der Funktion der gesamte Wertebereich sein, also müssen alle Elemente des Wertebereichs durch die Funktion getroffen werden, wenn wir die Elemente des Definitionsbereichs einsetzen. Bei endlichen Mengen funktioniert das nur, wenn der Definitionsbereich mindestens so viele Elemente hat wie der Wertebereich. Deshalb gibt es keine surjektive Abbildung von M_1 nach M_2. Eine surjektive Abbildung von M_2 nach M_1 ist zum Beispiel gegeben durch

$$g(3) = 1, g(5) = 1, g(7) = 2, g(11) = 4.$$

Da wir für die eine Richtung eine surjektive Abbildung und für die Andere eine Injektive ausschließen konnten, kann keine bijektive Abbildung zwischen den beiden Mengen existieren. Dafür müssten - gemäß obigen Beobachtungen - beide Mengen gleich viele Elemente besitzen.

b) Wir beginnen mit der Injektivität. Seien $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ und $f(x) = f(y)$. Es gilt

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow 1 + \frac{x}{1-x} = 1 + \frac{y}{1-y} \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} = \frac{y}{1-y}$$
$$\Leftrightarrow y - xy = y(1-x) = x(1-y) = x - xy \Leftrightarrow x = y.$$

Somit ist f injektiv. Für die Surjektivität sei $z \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ beliebig. Setze $x = \frac{z-1}{z}$. Dann gilt $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ und

$$f(x) = 1 + \frac{\frac{z-1}{z}}{1 - \frac{z-1}{z}} = 1 + \frac{\frac{z-1}{z}}{\frac{1}{z}} = 1 + (z-1) = z.$$

Somit ist f surjektiv und damit bijektiv.
Hinweis: Den richtigen Wert für x bei der Surjektivität findet man über dan Ansatz $f(x) = z$ und das Auflösungen nach x:

$$f(x) = z \Leftrightarrow 1 + \frac{x}{1-x} = z \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} = z - 1 \Leftrightarrow x = (z-1)(1-x) = z - 1 - zx + x \Leftrightarrow x = \frac{z-1}{z}$$