Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

WS 2018/2019
25.10.2018

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

2. Übungsblatt

Aufgabe 7 (Übung)

a) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt, dass

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leqslant \frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} \leqslant \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}.$$

b) Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ zwei beschränkte Mengen. Wir definieren

$$A + B := \{x \in \mathbb{R} : \ \exists a \in A, b \in B : \ x = a + b\}.$$

Beweisen Sie, dass die Menge $A + B$ ebenfalls beschränkt ist mit

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B, \qquad \inf(A+B) = \inf A + \inf B$$

Aufgabe 8 (Tutorium)

a) Bestimmen Sie jeweils alle $x \in \mathbb{R}$, für die folgende Ungleichungen gilt.

(i) $|x+2| > |x-3|$. (ii) $|2 - |2-x|| \leqslant 1$. (iii) $|x-4| > x^2$.

b) Bestimmen Sie, falls existent, jeweils das Supremum, Maximum, Infimum und Minimum der folgenden Mengen.

(i) $A := \{x^2 - x + 2 : \ x \in \mathbb{R}\}$. (ii) $B := \{x + \frac{1}{x} : \ 0 < x \leqslant 42\}$. (iii) $C := \{\frac{x^2}{1+x^2} : \ x \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 9 (Übung)

a) Beweisen Sie den Binomischen Satz, also

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$.

b) Wir definieren die Fibonacci-Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ durch die rekursive Vorschrift

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = 1, \qquad a_n = a_{n-2} + a_{n-1} \quad \forall n \geqslant 2.$$

Zeigen Sie induktiv, dass

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Aufgabe 10 (Tutorium)

a) Beweisen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion.

(i) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Zahl $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ durch 13 teilbar.

(iii) Es gilt $2^n \geqslant n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 4$.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst $n^2 > 2n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 4$.

b) Wo liegt der Fehler im folgenden Induktionsbeweis?
Behauptung: Alle Pferde haben dieselbe Farbe.
Beweis: Wir beweisen, dass in einer Gruppe von n Pferden ($n \in \mathbb{N}$) alle Pferde dieselbe Farbe haben. Da es endlich viele Pferde gibt, folgt die Behauptung durch die Wahl der entsprechenden Zahl n.
Induktionsanfang ($n = 1$): In einer Gruppe, die nur aus einem Pferd besteht, haben trivialerweise alle Pferde dieselbe Farbe.
Induktionsschluss ($n \to n + 1$): Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$ (Induktionsvoraussetzung). Aus einer Gruppe $P_1, \ldots, P_{n+1}$ mit $n + 1$ Pferden entfernen wir ein Pferd. Die restlichen n Pferde $P_1, \ldots, P_n$ haben nach Induktionsvoraussetzung dieselbe Farbe. Nun nehmen wir das entfernte Pferd zurück in die Gruppe und entfernen ein anderes Pferd aus der Gruppe. Die Gruppe enthält nun wieder n Pferde, zum Beispiel $P_1, \ldots, P_{n-1}, P_{n+1}$. Nach Induktionsvoraussetzung hat nun auch P_{n+1} dieselbe Farbe wie zum Beispiel P_1. Somit haben alle $n + 1$ Pferde dieselbe Farbe.

Aufgabe 11 (Übung)

a) Sei p ein reelles Polynom und $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p. Zeigen Sie, dass dann auch $\overline{z}$ eine Nullstelle von p ist.

b) Zerlegen Sie das Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$, gegeben durch

$$p(z) = z^4 + (1 + \mathrm{i})z^3 + (6 + \mathrm{i})z^2 + 6z,$$

in Linearfaktoren.

Aufgabe 12 (Tutorium)

a) Bestimme Sie den Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen.

(i) $z_1 := \frac{1}{(\mathrm{i}+1)^2}$. (ii) $z_2 := \frac{3+4\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$.

b) Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen der komplexen Zahlenebene

(i) $\{z \in \mathbb{C} : \ |z + 1 + \mathrm{i}| = |z - 3 - 3\mathrm{i}|\}$. (ii) $\{z \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Im} z^2 \leqslant 2\}$.

c) Bestimmen Sie jeweils alle $z \in \mathbb{C}$, die die folgenden Gleichungen erfüllen.

(i) $z^2 - 2z + 3 = 0$. (ii) $z^2 - 2\overline{z} + 1 = 0$.