Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

WS 2018/2019
25.10.2018

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 2. Übungsblatt

Aufgabe 7 (Übung)

a) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt, dass

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leqslant \frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} \leqslant \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}.$$

b) Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ zwei beschränkte Mengen. Wir definieren

$$A + B := \{x \in \mathbb{R} : \ \exists a \in A, b \in B : \ x = a + b\}.$$

Beweisen Sie, dass die Menge $A + B$ ebenfalls beschränkt ist mit

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B, \qquad \inf(A+B) = \inf A + \inf B$$

Lösungsvorschlag

a) Die einzelnen Terme der Ungleichung entsprechen der Funktion

$$f(a) = \frac{a}{1+a}$$

für $a \geqslant 0$ mit entsprechenden Werten für die Variable a. Seien $a, b \in \mathbb{R}_0^+ := [0, \infty)$. Es gilt:

$$\begin{aligned} f(a) \leq f(b) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b} \\ &\Leftrightarrow \quad a(1+b) \leq b(1+a) \\ &\Leftrightarrow \quad a + ab \leq b + ba \\ &\Leftrightarrow \quad a \leq b. \end{aligned}$$

Wegen der Dreiecksungleichung gilt $|x+y| \leq |x| + |y|$. Damit folgt

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} = f(|x+y|) \leq f(|x|+|y|) = \frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|}$$

Da $0 < 1 + |x| \leq 1 + |x| + |y|$ bzw. $0 < 1 + |y| \leq 1 + |x| + |y|$ gilt, folgt schließlich

$$\frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} = \frac{|x|}{1+|x|+|y|} + \frac{|y|}{1+|x|+|y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}.$$

b) Zunächst zum Supremum: Da A und B nichtleer und beschränkt, also insbesondere nach oben beschränkt sind, existieren $\alpha := \sup A$ und $\beta := \sup B$. Wir müssen nun zeigen, dass $A + B$ nach oben beschränkt ist und $\sup(A+B) = \alpha + \beta$ gilt. Dazu müssen wir zwei Dinge beweisen: Zum einen, dass $\alpha + \beta$ eine obere Schranke von $A+B$ ist, zum anderen, dass dies auch die *kleinste* obere Schranke ist.

Wählen wir ein beliebiges $x \in A+B$, so existieren $a \in A$ und $b \in B$ mit $x = a+b$. Da α bzw. β obere Schranken für A bzw. B sind, gilt $a \le \alpha$ und $b \le \beta$. Addieren wir diese beiden Gleichungen, erhalten wir

$$x = a + b \le \alpha + \beta.$$

Damit wissen wir, dass $A+B$ nach oben beschränkt und $\alpha+\beta$ eine obere Schranke von $A+B$ ist. Also existiert das Supremum und es gilt $\sup(A+B) \le \alpha+\beta$. Wie zeigen, wir, dass hier Gleichheit gilt, also, dass $\alpha + \beta$ die kleinste obere Schranke ist? Dazu beweisen wir, dass keine Zahl, die kleiner als $\alpha + \beta$ ist, eine obere Schranke für $A+B$ sein kann, also zu jeder Zahl $\Gamma < \alpha + \beta$ ein $x \in A+B$ existiert mit $x > \Gamma$.

Sei also $\Gamma < \alpha + \beta$ beliebig. Dann ist $\Gamma - \alpha < \beta$. Da β die *kleinste* obere Schranke von B ist, muss ein $b \in B$ existieren mit $b > \Gamma - \alpha$. Es gilt also $\Gamma - b < \alpha$. Da α die *kleinste* obere Schranke von A ist, existiert wiederum ein $a \in A$ mit $a > \Gamma - b$, also $a + b > \Gamma$. Wegen $a + b \in A + B$ kann damit Γ keine obere Schranke von $A+B$ sein.

Nun zum Infimum: Da A und B nach unten beschränkt sind, folgt genau wie oben, dass auch $A+B$ nach unten beschränkt ist. Wir beweisen kurz das folgende Resultat: Sei $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$, beschränkt. Setze $-M := \{-x : x \in M\}$. Dann ist γ genau dann eine untere Schranke von M, wenn $-\gamma$ obere Schranke von $-M$ ist, denn $\gamma \leqslant x$ für alle $x \in M$ ist äquivalent zu $-\gamma > -x$ für alle $x \in M$. Hieraus folgt $\inf(M) = -\sup(-M)$, da die Auswahl der größten unteren Schranke von M dasselbe Ergebnis liefert wir das Negative der größten oberen Schranke von $-M$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\inf(A+B) &= -\sup\big(-(A+B)\big) = -\sup\big((-A)+(-B)\big) = -\big(\sup(-A)+\sup(-B)\big)\\ &= -\big((-\inf A)+(-\inf B)\big) = \inf A + \inf B.\end{aligned}$$

Aufgabe 8 (Tutorium)

a) Bestimmen Sie jeweils alle $x \in \mathbb{R}$, für die folgende Ungleichungen gilt.

(i) $|x+2| > |x-3|$. (ii) $|2-|2-x|| \leqslant 1$. (iii) $|x-4| > x^2$.

b) Bestimmen Sie, falls existent, jeweils das Supremum, Maximum, Infimum und Minimum der folgenden Mengen.

(i) $A := \{x^2 - x + 2 : x \in \mathbb{R}\}$. (ii) $B := \{x + \frac{1}{x} : 0 < x \leqslant 42\}$. (iii) $C := \{\frac{x^2}{1+x^2} : x \in \mathbb{R}\}$.

Lösungsvorschlag

a) (i) Da der Betrag stückweise definiert ist, nehmen wir eine Fallunterscheidung vor.
<u>1. Fall:</u> $x < -2$. Die Argumente in den Beträgen auf beiden Seiten sind negativ, weshalb wir das Vorzeichen beim Weglassen der Beträge umdrehen müssen. Die Ungleichung vereinfacht sich dann zu

$$|x+2| > |x-3| \Leftrightarrow -x-2 = -(x+2) > -(x-3) = -x+3 \Leftrightarrow 0 > 5.$$

Letzteres ist eine falsche Aussage für alle $x < -2$, weshalb wir in diesem Fall keine Werte finden, die die Ungleichung erfüllen.

2. Fall: $-2 \leqslant x < 3$. Das Argument im linken Betrag ist positiv, dasjenige im rechten Betrag negativ. Beim Auflösen müssen wir also nur auf der rechten Seite das Vorzeichen ändern. Es ergibt sich

$$|x+2| > |x-3| \Leftrightarrow x+2 > -(x-3) = -x+3 \Leftrightarrow 2x > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}.$$

In diesem Fall erfüllen also alle x mit $\frac{1}{2} < x < 3$ die Ungleichung.
3. Fall: $x \geqslant 3$. Nun sind alle Argumente positiv und die Ungleichung vereinfacht sich zu

$$|x+2| > |x-3| \Leftrightarrow x+2 > x-3 \Leftrightarrow 5 > 0.$$

Da dies eine wahre Aussage ist, lösen alle $x \geqslant 3$ die Ungleichung. Insgesamt gilt

$$|x+2| > |x-3| \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}.$$

(ii) Zunächst unterscheiden wir nach dem Vorzeichen des Arguments im inneren Betrag, da wir zuvor keine Aussage über den äußeren Betrag treffen können.
1. Fall: $x < 2$. Dann ist $2-x > 0$ und deshalb

$$|2-|2-x|| \leqslant 1 \Leftrightarrow |x| \leqslant 1.$$

Damit ist die Ungleichung in diesem Fall erfüllt für $-1 \leqslant x \leqslant 1$.
2. Fall: $x \geqslant 2$. Dann ist $2-x \leqslant 0$ und deshalb

$$|2-|2-x|| \leqslant 1 \Leftrightarrow |4-x| \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant 4-x \leqslant 1 \Leftrightarrow -5 \leqslant -x \leqslant -3 \Leftrightarrow 3 \leqslant x \leqslant 5.$$

Insgesamt gilt $|2-|2-x|| \leqslant 1 \Leftrightarrow x \in [-1,1] \cup [3,5]$.

(iii) Wieder unterscheiden wir nach dem Vorzeichen des Arguments im Betrag.
1. Fall: $x \geqslant 4$. Dann ist $x-4 \geqslant 0$ und somit

$$|x-4| > x^2 \Leftrightarrow x^2 - x + 4 < 0 \Leftrightarrow (x-\frac{1}{2})^2 + \frac{15}{4} < 0$$

Da beide Summanden nicht negativ sind, erfüllt kein x die Ungleichung.
2. Fall: $x < 4$. Dann ist $x-4 < 0$ und somit

$$|x-4| > x^2 \Leftrightarrow x^2 + x - 4 < 0 \Leftrightarrow (x+\frac{1}{2})^2 < \frac{17}{4}.$$

Wir zeigen nun, dass $a^2 < b^2 \Leftrightarrow |a| < |b|$ für $a, b \in \mathbb{R}$. Die Richtung von rechts nach links folgt wegen $a^2 = |a|^2 = |a||a| < |a||b| < |b||b| = |b|^2 = b^2$. Für die Richtung von links nach rechts beobachten wir $0 < (b^2 - a^2) = (b-a)(b+a)$. Somit sind beide Faktoren links $\geqslant$ oder $\leqslant$ Null. Also entweder $b > a > -b$ oder $b < a < -b$. Je nachdem, ob b positiv oder negativ ist, ist eine Ungleichungskette unmöglich und die andere liefert $|a| < |b|$.
Damit liefert die letzte Ungleichung oben

$$|x-4| > x^2 \Leftrightarrow |x+\frac{1}{2}| < \frac{\sqrt{17}}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2} < x < -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}.$$

Da $\frac{\sqrt{17}+1}{2} < 4$ gilt, ist dies auch die komplette Lösungsmenge, also $|x-4| > x^2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2} < x < -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}$.

b) (i) 1) Es gilt $\min A = \frac{7}{4}$. Wir formen zunächst den definierenden Ausdruck mittels quadratischer Ergänzung um: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$x^2 - x + 2 = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}.$$

Daraus lesen wir einerseits ab, dass $(\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} + 2 = \frac{7}{4}$ gilt, womit $\frac{7}{4}$ in A liegt. Andererseits sehen wir $x^2 - x + 2 \geq \frac{7}{4}$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ ein. Also folgt direkt $\inf A = \min A = \frac{7}{4}$.

2) Maximum und Supremum von A exisitieren nicht. Dazu zeigen wir, dass A nach oben unbeschränkt ist, d.h. zu jedem $\gamma \in \mathbb{R}$ existiert ein $a \in A$ mit $a > \gamma$. Sei $\gamma \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir setzen $x := \max\{\gamma, 2\} = \begin{cases} 2, & \gamma < 2, \\ \gamma, & \gamma \geqslant 2. \end{cases}$. Dann gilt

$$\underbrace{x^2 - x + 2}_{=:a\in A} = x \underbrace{(x-1)}_{\geq 1,\text{ da } x\geq 2} + 2 \geq x + 2 > x \geq \gamma.$$

(ii) 1) Es gilt $\min B = 2$. Es ist $2 \in B$ (man setze $x = 1$). Ferner erhalten wir für alle $x \in (0, 42]$

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + 1 \geq 2x \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x-1)^2 \geq 0$$

und letzteres ist offensichtlich wahr. Also folgt direkt $\inf B = \min B = 2$.

2) Supremum und Maximum von B existieren nicht. Um zu begründen, dass B nicht nach oben beschränkt ist, führen wir einen Widerspruchsbeweis und nehmen dazu an, dass Γ eine obere Schranke von B ist. Zuerst stellen wir fest, dass $\Gamma \geq 2$ ist, denn nach 1) gilt $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$ für alle $x \in (0, 42]$. Außerdem gilt für alle $x \in (0, 42]$: $x + \frac{1}{x} \leq \Gamma$, also insbesondere $\frac{1}{x} \leq \Gamma$ bzw. $\frac{1}{\Gamma} \leq x$. Ist jedoch $x := \frac{1}{2\Gamma}$ gesetzt, so ist diese Ungleichung wegen $\frac{1}{\Gamma} \leq x = \frac{1}{2\Gamma} \Leftrightarrow 1 \leq \frac{1}{2}$ falsch, obwohl $x \in (0, \frac{1}{2}] \subset (0, 42]$ liegt. Somit ist die getroffene Annahme falsch, woraus die Behauptung folgt.

(iii) 1) Es gilt $\min C = 0$. Es gilt $0 \in C$ (man setze $x = 0$). Außerdem gilt offenbar $x^2(1+x^2)^{-1} \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also folgt direkt $\inf D = \min D = 0$.

2) Es gilt $\sup C = 1$. Die Menge C ist nach oben durch 1 beschränkt, denn wegen $1 + x^2 > 0$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{x^2}{1+x^2} \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 \leq 1 + x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leq 1$$

und letzteres ist wahr. Es bleibt zu zeigen, dass 1 die kleinste obere Schranke von C ist. Sei $\Gamma < 1$ beliebig. Wir wollen zeigen, dass Γ keine obere Schranke von C ist. Wir müssen dazu ein Element in C angeben, das größer als Γ ist. Hierzu zeigen wir, dass es ein $x \in \mathbb{R}$ gibt mit $\frac{x^2}{1+x^2} > \Gamma$. Dies ist äquivalent zu

$$x^2 > \Gamma(1 + x^2) \quad \Longleftrightarrow \quad (1-\Gamma)x^2 > \Gamma \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 > \frac{\Gamma}{1-\Gamma}$$

und die letzte Ungleichung ist für ein hinreichend großes $x \in \mathbb{R}$ (etwa für $x = \frac{\Gamma}{1-\Gamma} + 1$) erfüllt.

3) C hat kein Maximum, da $1 \notin C$. Angenommen, $1 \in C$. Dann gibt es $x \in \mathbb{R}$ mit $1 = \frac{x^2}{1+x^2}$. Daraus folgt $x^2 + 1 = x^2$ und daraus der Widerspruch $1 = 0$.

Aufgabe 9 (Übung)

a) Beweisen Sie den Binomischen Satz, also

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$.

b) Wir definieren die Fibonacci-Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ durch die rekursive Vorschrift

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = 1, \qquad a_n = a_{n-2} + a_{n-1} \quad \forall n \geqslant 2.$$

Zeigen Sie induktiv, dass

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Lösungsvorschlag

a) Induktionsanfang: Die Formel ist klar für $n = 0$ bzw. auch für $n = 1$ wegen $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$.
Induktionsschluss: Für ein $n \in \mathbb{N}$ und alle $a, b \in \mathbb{R}$ gelte $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ (Induktionsvoraussetzung). Dann gilt $(n \to n+1)$

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}.
\end{aligned}$$

Nun verschieben wir den Summationsindex in der zweiten Summe. Wir wählen $j = k + 1$ und ersetzen somit jedes k durch $j - 1$. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^{n-j+1} b^j \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^{n-k+1} b^k + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k,
\end{aligned}$$

wobei wir

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{(n-k+1) \cdot n! + k \cdot n!}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!((n+1)-k)!} = \binom{n+1}{k}$$

benutzt haben.

b) Induktionsanfang: Da wir im Induktionsschritt die Rekursionsformel verwenden werden und in dieser die zwei vorhergehenden Folgenglieder auftreten, müssen wir hier die Formel für die ersten beiden Folgenglieder nachrechnen.

$$a_0 = 0 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1-1) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0\right)$$

$$a_1 = 1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{(1+\sqrt{5})-(1-\sqrt{5})}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right)$$

Induktionsschluss: Für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ sei die Formel für a_{n-2} und a_{n-1} korrekt (Induktionsvoraussetzung). Wir benutzen die Abkürzungen

$$x_1 := \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad x_2 := \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

und stellen fest, dass beides Lösungen der Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$ sind, womit $1 + x_i = x_i^2$ gilt für $i = 1, 2$. Nun gilt $((n-2, n-1) \to n)$

$$\begin{aligned} a_n = a_{n-2} + a_{n-1} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(x_1^{n-2} - x_2^{n-2}) + \frac{1}{\sqrt{5}}(x_1^{n-1} - x_2^{n-1}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(x_1^{n-2}(1+x_1) - x_2^{n-2}(1+x_2)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(x_1^n - x_2^n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right). \end{aligned}$$

Aufgabe 10 (Tutorium)

a) Beweisen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion.

(i) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Zahl $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ durch 13 teilbar.

(iii) Es gilt $2^n \geqslant n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 4$.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst $n^2 > 2n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 4$.

b) Wo liegt der Fehler im folgenden Induktionsbeweis?
Behauptung: Alle Pferde haben dieselbe Farbe.
Beweis: Wir beweisen, dass in einer Gruppe von n Pferden ($n \in \mathbb{N}$) alle Pferde dieselbe Farbe haben. Da es endlich viele Pferde gibt, folgt die Behauptung durch die Wahl der entsprechenden Zahl n.
Induktionsanfang ($n = 1$): In einer Gruppe, die nur aus einem Pferd besteht, haben trivialerweise alle Pferde dieselbe Farbe.
Induktionsschluss ($n \to n+1$): Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$ (Induktionsvoraussetzung). Aus einer Gruppe $P_1, \ldots, P_{n+1}$ mit $n+1$ Pferden entfernen wir ein Pferd. Die restlichen n Pferde $P_1, \ldots, P_n$ haben nach Induktionsvoraussetzung dieselbe Farbe. Nun nehmen wir das entfernte Pferd zurück in die Gruppe und entfernen ein anderes Pferd aus der Gruppe. Die Gruppe enthält nun wieder n Pferde, zum Beispiel $P_1, \ldots, P_{n-1}, P_{n+1}$. Nach Induktionsvoraussetzung hat nun auch P_{n+1} dieselbe Farbe wie zum Beispiel P_1. Somit haben alle $n+1$ Pferde dieselbe Farbe.

Lösungsvorschlag

a) (i) Induktionsanfang: $\sum_{k=1}^1 k^2 = 1^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$.
Induktionsschritt: Die Formel gelte für ein $n \in \mathbb{N}$ (Induktionsvoraussetzung). Dann folgt

$(n \to n+1)$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))}{6}$$
$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}.$$

(ii) Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist die gegebene Zahl $4^{2\cdot 1+1} + 3^{1+2} = 91 = 7 \cdot 13$.
Induktionsschritt: Die gegebene Zahl sei durch 13 teilbar für ein $n \in \mathbb{N}$, also $4^{2n+1} + 3^{n+2} = 13k$ für ein $k \in \mathbb{N}$ (Induktionsvoraussetzung). Dann gilt $(n \to n+1)$

$$4^{2(n+1)+1} + 3^{(n+1)+2} = 16 \cdot 4^{2n+1} + 3 \cdot 3^{n+2} = 3(4^{2n+1} + 3^{n+2}) + 13 \cdot 4^{2n+1} = 13 \cdot (3k + 4^{2n+1}).$$

(iii) Wir zeigen zunächst den Hinweis.
Induktionsanfang: Für $n = 4$ gilt $n^2 = 16 > 9 = 2n+1$.
Induktionsschluss: Es gelte $n^2 > 2n+1$ für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 4$ (Induktionsvoraussetzung). Dann folgt $(n \to n+1)$

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 > 2n + 2n + 1 + 1 > 2n + 3 = 2(n+1) + 1.$$

Nun beweisen wir mit diesem Wissen die Aussage der Aufgabe.
Induktionsanfang: Für $n = 4$ gilt $2^n = 16 \geqslant 16 = n^2$.
Induktionsschluss: Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 4$ (Induktionsvoraussetzung). Dann folgt $(n \to n+1)$

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geqslant 2n^2 > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2,$$

wobei wir für die letzte Ungleichung den Hinweis benutzt haben.

b) Das Problem ist, dass die Argumentation des Induktionsschlusses nicht beim Schritt von 1 nach 2, also für $n = 1$, funktioniert. Aus einer Gruppe von $n + 1 = 2$ Pferden können wir nicht zwei verschiedene Pferde entfernen und dabei ein festes Pferd (im Beweis mit P_1 bezeichnet) in den resultierenden Gruppen haben. Wäre der Beweis erbracht, dass je zwei Pferde immer dieselbe Farbe haben, so würde der Induktionsschluss jedoch funktionieren.

Aufgabe 11 (Übung)

a) Sei p ein reelles Polynom und $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p. Zeigen Sie, dass dann auch $\overline{z}$ eine Nullstelle von p ist.

b) Zerlegen Sie das Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$, gegeben durch

$$p(z) = z^4 + (1+\mathrm{i})z^3 + (6+\mathrm{i})z^2 + 6z,$$

in Linearfaktoren.

Lösungsvorschlag

a) Ein reelles Polynom hat die Form

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

für ein $n \in \mathbb{N}$ und $a_k \in \mathbb{R}$ für $k = 0, \dots n$. Gilt nun $p(z) = 0$ für ein $z \in \mathbb{C}$, so gilt

$$p(\overline{z}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z}^k = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k}\,\overline{z^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k z^k} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k} = \overline{p(z)} = \overline{0} = 0.$$

Also ist $\overline{z}$ ebenfalls eine Nullstelle von p.

b) Die offensichtlichste Nullstelle von p ist die Null, denn

$$p(z) = z(z^3 + (1+\mathrm{i})z^2 + (6+\mathrm{i})z + 6).$$

Eine Nullstelle des Ausdrucks in Klammern ist gegeben durch die -1, denn

$$-1 + (1+\mathrm{i}) - (6+\mathrm{i}) + 6 = 0.$$

Die restliche Nullstellen von p finden wir durch eine Polynomdivision.

$$\begin{array}{ccccccc}
(z^3 & + & (1+\mathrm{i})z^2 & + & (6+\mathrm{i})z & + & 6) \div (z+1) = z^2 + \mathrm{i}z + 6. \\
z^3 & + & z^2 & & & & \\
 & & \mathrm{i}z^2 & + & (6+\mathrm{i})z & & \\
 & & \mathrm{i}z^2 & + & \mathrm{i}z & & \\
 & & & & 6z & + & 6 \\
 & & & & 6z & + & 6 \\
 & & & & & & 0
\end{array}$$

Nun suchen wir noch die Nullstellen von $z^2 + \mathrm{i}z + 6$. Es gilt

$$z^2 + \mathrm{i}z + 6 = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{\mathrm{i}}{2}\right)^2 = -\frac{25}{4} \Leftrightarrow z + \frac{\mathrm{i}}{2} = \pm\frac{5\mathrm{i}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{(-1 \pm 5)\mathrm{i}}{2}.$$

Somit gilt

$$p(z) = z(z+1)(z-2\mathrm{i})(z+3\mathrm{i}).$$

Aufgabe 12 (Tutorium)

a) Bestimme Sie den Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen.

(i) $z_1 := \frac{1}{(\mathrm{i}+1)^2}$.

(ii) $z_2 := \frac{3+4\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$.

b) Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen der komplexen Zahlenebene

(i) $\{z \in \mathbb{C} : |z+1+\mathrm{i}| = |z-3-3\mathrm{i}|\}$.

(ii) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z^2 \leqslant 2\}$.

c) Bestimmen Sie jeweils alle $z \in \mathbb{C}$, die die folgenden Gleichungen erfüllen.

(i) $z^2 - 2z + 3 = 0$.

(ii) $z^2 - 2\overline{z} + 1 = 0$.

Lösungsvorschlag

a) Bestimme Sie den Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen.

(i) Es gilt

$$z_1 = \frac{1}{(\mathrm{i}+1)^2} = \frac{1}{\mathrm{i}^2+2\mathrm{i}+1} = \frac{1}{2\mathrm{i}} \cdot \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}}{2\mathrm{i}^2} = -\frac{1}{2}\mathrm{i},$$

also $\operatorname{Re} z_1 = 0$, $\operatorname{Im} z_1 = -\frac{1}{2}$.

(ii) Es gilt

$$z_2 = \frac{3+4\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}} = \frac{3+4\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}} \cdot \frac{1+2\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}} = \frac{3+10\mathrm{i}+8\mathrm{i}^2}{1-4\mathrm{i}^2} = -1+2\mathrm{i},$$

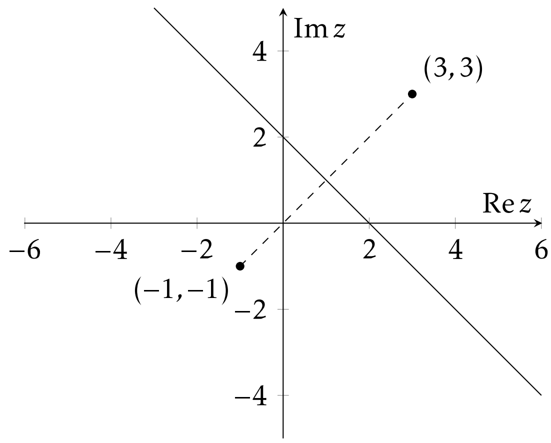
somit $\operatorname{Re} z_2 = -1$, $\operatorname{Im} z_2 = 2$.

b) Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen der komplexen Zahlenebene

(i) Wegen $|z+1+\mathrm{i}| = |z-(-1-\mathrm{i})|$ und $|z-3-3\mathrm{i}| = |z-(3+3\mathrm{i})|$ handelt es sich um die Menge der Punkte in $\mathbb{C}$, die von $-1-\mathrm{i}$ und $3+3\mathrm{i}$ denselben Abstand haben, also die Gerade durch die Punkte 2 und 2i.

Wollen wir dies rechnerisch feststellen, schreiben wir $z = x + \mathrm{i}y$ und quadrieren beide Seiten (es geht dabei keine Information verloren, da beide Seiten nicht negativ sind). Nach der Definition des Betrages gilt also

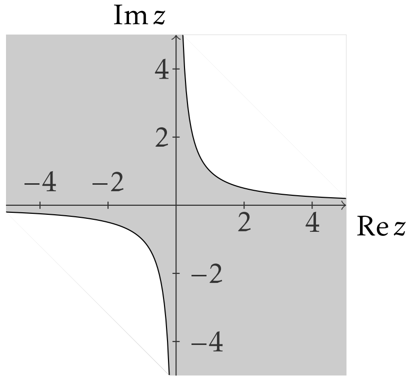
$$\begin{aligned} |z+1+\mathrm{i}| = |z-3-3\mathrm{i}| &\Leftrightarrow |z+1+\mathrm{i}|^2 = |z-3-3\mathrm{i}|^2 \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 = (x-3)^2 + (y-3)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2+2y+1 = x^2-6x+9+y^2-6y+9 \\ &\Leftrightarrow 8y = 16-8x \Leftrightarrow y = 2-x. \end{aligned}$$



(ii) Wegen $z^2 = x^2 - y^2 + \mathrm{i}2xy$ gilt

$$\left\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z^2) \leqslant 2\right\} = \{z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \mid xy \leqslant 1\}.$$

Wir unterscheiden drei Fälle
1. Fall $x > 0$. Dann ist $y \leqslant \frac{1}{x}$ gefordert.
2. Fall $x = 0$. Dann ist $xy \leqslant 1$ für alle $y \in \mathbb{R}$ erfüllt.
3. Fall $x < 0$. Dann ist $y \geqslant \frac{1}{x}$ gefordert.



c) Bestimmen Sie jeweils alle $z \in \mathbb{C}$, die die folgenden Gleichungen erfüllen.

(i) Durch die Gleichung werden die Nullstellen eines Polynoms zweiten Grades gesucht, von denen es maximal zwei verschiedene gibt. Wegen

$$z^2 - 2z + 3 = 0 \Longleftrightarrow (z-1)^2 = -2$$

ist die Gleichung genau dann erfüllt, wenn $z - 1 = \pm \mathrm{i}\sqrt{2}$. Sie besitzt also die Lösungen

$$z_1 = 1 + \mathrm{i}\sqrt{2} \qquad \text{und} \qquad z_2 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{2}.$$

(ii) Wir schreiben $z = x + \mathrm{i}y$. Dann gilt

$$\begin{aligned} z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0 &\Longleftrightarrow x^2 + 2\mathrm{i}xy - y^2 - 2x + 2\mathrm{i}y + 1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow (x^2 - y^2 - 2x + 1) + \mathrm{i}(2xy + 2y) = 0. \end{aligned}$$

Also müssen Real- und Imaginärteil obiger Zahl 0 sein. Die zweite Gleichung, also $2y(x+1) = 0$, hat zwei Lösungen:
1. Fall: $y = 0$. Dann lautet die erste Gleichung $x^2 - 2x + 1 = 0$. Diese hat die reelle Lösung $x = 1$.
2. Fall: $x = -1$. Dann lautet die erste Gleichung $y^2 = 4$ und hat die reellen Lösungen $y = \pm 2$.

Insgesamt hat die Gleichung also die Lösungen

$$z_1 = 1, \qquad z_2 = -1 + 2\mathrm{i} \qquad \text{und} \qquad z_3 = -1 - 2\mathrm{i}.$$