Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

WS 2018/2019
31.10.2018

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

3. Übungsblatt

Aufgabe 13 (Übung)

a) Die Folge (a_n) sei definiert durch $a_n := \frac{2n}{n+1}$. Beweisen Sie die Konvergenz von (a_n) gegen ein a über die Definition, indem Sie zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon)$ finden mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant n_0(\varepsilon)$.

b) Untersuchen Sie die Folgen mit den nachstehenden Folgengliedern ($n \in \mathbb{N}$) auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

(i) $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$,

(ii) $b_n = (n+1)^p(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}), \quad p \in \mathbb{Q}$.

Aufgabe 14 (Tutorium)

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen (a_n) auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

a) $a_n = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} k}{n^2}$.

b) $a_n = \sqrt{9n^2 + 2n + 1} - 3n$.

c) $a_n = \left(\dfrac{3+4\mathrm{i}}{5}\right)^n$.

d) $a_n = \dfrac{(n+2)^{42} - n^{42}}{n^{41}}$.

e) $a_n = \dfrac{1 + n^3 - 2n^4}{n3^n - 4n^2}$.

f) $a_n = \sqrt[n]{n!}$.

g) $a_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \dfrac{1}{k^2}\right)$.

h) $a_n = \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$, $a, b, c \geqslant 0$.

Aufgabe 15 (Übung)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Ist $b \in \mathbb{C}$ mit $|b| > 1$, so divergiert (b^n).

b) Ist (a_n) eine Folge, so gilt: (a_n) ist konvergent $\Rightarrow$ (a_n) ist beschränkt.

c) Ist $k \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$, so gilt

$$\frac{n^k}{z^n} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Aufgabe 16 (Tutorium)

a) Die Folge (a_n) sei rekursiv definiert durch $a_1 := 0$, $a_{n+1} := \frac{5}{36} + a_n^2$ für $n \in \mathbb{N}$. Untersuchen Sie die Folge auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

b) Zu einer Folge (a_n) definiert man die Folge der *Cesàro-Mittel* durch

$$c_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

(i) Zeigen Sie: Konvergiert (a_n) gegen ein $a \in \mathbb{R}$, dann konvergiert auch (c_n) gegen a.

(ii) Geben Sie eine divergente Folge (a_n) an deren Folge von Cesàro-Mitteln konvergiert. Beweisen Sie die Konvergenz.

Aufgabe 17 (Übung)

a) Zeigen Sie: Ist (a_n) eine Nullfolge und (b_n) eine beschränkte Folge, dann konvergiert die Folge mit den Gliedern $a_n b_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Gilt das auch, wenn (a_n) gegen einen anderen Wert als 0 konvergiert?

b) Sei $A \subset \mathbb{R}$ nicht leer und nach oben beschränkt. Beweise Sie die Existenz einer maximierenden Folge, d.h. einer Folge (a_n) mit $a_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \sup A$.

Aufgabe 18 (Tutorium)

Geben Sie in **a)** bis **e)** reelle Folgen (für $n \in \mathbb{N}$) mit den jeweiligen Eigenschaften an (im Falle *divergent* jeweils mit einem beschränkten und einem unbeschränkten Beispiel in (ii) bis (v), falls möglich).

a) (a_n) ist beschränkt und divergent.

b) (a_n) ist konvergent und (b_n) divergent sowie $a_{2n} = b_{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) (a_n) ist konvergent und (b_n) divergent sowie $(a_n \cdot b_n)$ konvergent.

d) (a_n) ist konvergent und (b_n) divergent sowie $(a_n \cdot b_n)$ divergent

e) (a_n) und (b_n) sind jeweils divergent sowie $(a_n \cdot b_n)$ konvergent.