Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 13 (Übung)

a) Die Folge (a_n) sei definiert durch $a_n := \frac{2n}{n+1}$. Beweisen Sie die Konvergenz von (a_n) gegen ein a über die Definition, indem Sie zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon)$ finden mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant n_0(\varepsilon)$.

b) Untersuchen Sie die Folgen mit den nachstehenden Folgengliedern ($n \in \mathbb{N}$) auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

(i) $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$, (ii) $b_n = (n+1)^p(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$, $p \in \mathbb{Q}$.

Lösungsvorschlag

a) Indem wir im Zähler und Nenner ein n ausklammern und die aus der Vorlesung bekannte Tatsache verwenden, dass $\frac{1}{n}$ gegen 0 konvergiert für $n \to \infty$, sehen wir anhand der Rechenregeln für konvergente Folgen, dass

$$a_n = \frac{2n}{n+1} = \frac{2}{1+\frac{1}{n}} \to 2 \qquad (n \to \infty).$$

Genauer gilt

$$|a_n - 2| = \left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| = \left|\frac{-2}{n+1}\right| = \frac{2}{n+1}$$

und somit $|a_n - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{2}{\varepsilon} - 1$. Wir wählen also $n_0(\varepsilon)$ als die kleinste natürliche Zahl größer $\frac{2}{\varepsilon} - 1$.

b) (i) Sei $n \in \mathbb{N}$. Für alle $k \in \mathbb{N}_{\leqslant n}$ gilt dann

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n},$$

also folgt

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}} = \sqrt{\frac{n^2}{n^2+n}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = n\frac{1}{n} = 1,$$

das heißt $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \leqslant a_n \leqslant 1$. Nach Satz 6.2 der Vorlesung gilt $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \to \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1$ für $n \to \infty$. Daher folgt, ebenfalls mit Satz 6.2, $a_n \to 1$ für $n \to \infty$.

(ii) Zuerst berechnen wir

$$b_n = (n+1)^p \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{(n+1)^p}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Jetzt schätzen wir die Glieder b_n nach unten bzw. oben ab. Das liefert eine Idee wann die Folge konvergiert und gegen welchen Grenzwert. Indem wir den Summanden $0 \le \sqrt{n}$ im Nenner wegfallen lassen erhalten wir

$$b_n \le \frac{(n+1)^p}{\sqrt{n+1}+0} = (n+1)^{p-1/2}.$$

Wegen $n \le n+1$ gilt $\sqrt{n} \le \sqrt{n+1}$ nach Lemma 4.13. Wir erhalten damit die untere Abschätzung

$$b_n \ge \frac{(n+1)^p}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}} = \frac{1}{2}(n+1)^{p-1/2}.$$

Wir sehen, dass wir die Fälle $p < \frac{1}{2}$, $p = \frac{1}{2}$ und $p > \frac{1}{2}$ betrachten sollten, weil sich damit das Verhalten der einschließenden Folgen ändert.

Falls $p < \frac{1}{2}$ ($\Longleftrightarrow p - \frac{1}{2} < 0$), folgt (wieder mit Lemma 4.13)

$$0 \le b_n \le (n+1)^{p-1/2} \le n^{p-1/2} \to 0, \ (n \to \infty).$$

In der Übung wurde gezeigt, dass in diesem Fall $b_n \to 0$, $(n \to \infty)$.

Falls $p = \frac{1}{2}$ ($\Longleftrightarrow p - \frac{1}{2} = 0$) nutzen wir wieder $\sqrt{n} \le \sqrt{n+1}$ aber diesmal für eine obere Abschätzung. Es gilt

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(n+1)^{p-1/2} \le b_n \le \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\frac{1}{n}}{1}} \to \frac{1}{2}$$

Satz 6.2 liefert, dass in diesem Fall $b_n \to \frac{1}{2}$, $(n \to \infty)$.

Falls $p > \frac{1}{2}$ ($\Longleftrightarrow p - \frac{1}{2} < 0$) erhalten wir mit der unteren Abschätzung von oben (es ist $n < n+1$ und $p - \frac{1}{2} > 0$)

$$b_n \ge \tfrac{1}{2}(n+1)^{p-1/2} \ge \tfrac{1}{2}n^{p-1/2}.$$

Die Folge mit den Gliedern $n^{p-1/2}$ unbeschränkt ist. Somit ist auch die Folge (b_n) in diesem Fall unbeschränkt.

Aufgabe 14 (Tutorium)

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen (a_n) auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

a) $a_n = \dfrac{\sum_{k=1}^n k}{n^2}$.

b) $a_n = \sqrt{9n^2+2n+1} - 3n$.

c) $a_n = \left(\dfrac{3+4\mathrm{i}}{5}\right)^n$.

d) $a_n = \dfrac{(n+2)^{42} - n^{42}}{n^{41}}$.

e) $a_n = \dfrac{1+n^3-2n^4}{n3^n - 4n^2}$.

f) $a_n = \sqrt[n]{n!}$.

g) $a_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

h) $a_n = \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n},\ a, b, c \geqslant 0$.

Lösungsvorschlag

a) Es gilt nach Vorlesung, dass $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Somit folgt

$$a_n = \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} \to \frac{1}{2} \qquad (n \to \infty).$$

b) Es gilt (siehe ähnliches Beispiel in der Vorlesung)

$$\begin{aligned} a_n = \sqrt{9n^2+2n+1} - 3n = \frac{(\sqrt{9n^2+2n+1} - 3n)(\sqrt{9n^2+2n+1} + 3n)}{\sqrt{9n^2+2n+1} + 3n} &= \frac{2n+1}{\sqrt{9n^2+2n+1} + 3n} \\ &= \frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{9+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}+3} \to \frac{2}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{3} \qquad (n \to \infty). \end{aligned}$$

c) Da $|\frac{3+4\mathrm{i}}{5}| = 1$ ist, können wir mit unserem bisherigen Wissen keine Aussage über das Konvergenzverhalten der Folge machen. Tatsächlich konvergiert eine Folge (b^n) mit $|b| = 1$ jedoch nur dann, wenn $b = 1$ ist. Würde die gegebene Folge konvergieren, wäre sie nach Vorlesung eine Cauchyfolge, sodass mit wachsendem n die Folgenglieder beliebig nahe beisammen liegen müssten, was insbesondere

$$|a_{n+1} - a_n| \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

bedeutet. Es gilt jedoch

$$|a_{n+1} - a_n| = \left|\frac{3+4\mathrm{i}}{5}\right|^n \left|\frac{3+4\mathrm{i}}{5} - 1\right| = 1 \cdot \sqrt{\left(\frac{-2}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{5}} \neq 0.$$

d) Nach dem Binomischen Satz gilt

$$\begin{aligned} a_n = \frac{(n+2)^{42} - n^{42}}{n^{41}} = \frac{\sum_{k=0}^{42}\binom{42}{k}2^{42-k}n^k - n^{42}}{n^{41}} &= \frac{\sum_{k=0}^{41}\binom{42}{k}2^{42-k}n^k}{n^{41}} \\ &= \binom{42}{41}2 + \sum_{k=0}^{40} 2^{42-k}n^{k-41} \to \binom{42}{41}2 = 84 \qquad (n \to \infty). \end{aligned}$$

e) Wir benutzen **Aufgabe 15 c)** um zu sehen, dass

$$a_n = \frac{1+n^3-2n^4}{n3^n - 4n^2} = \frac{\frac{1}{n3^n} + \frac{n^2}{3^n} - \frac{2n^3}{3^n}}{1 - \frac{4n}{3^n}} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

f) Konvergente Folgen sind beschränkt. Wir zeigen, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist und damit nicht konvergent sein kann. Sei dazu $k \in \mathbb{N}$. Es gilt:

$$(2k)! = \underbrace{2k \cdot (2k-1) \cdot \ldots \cdot (k+1)}_{k \text{ Faktoren, jeder } \geq k} \cdot \underbrace{k \cdot \ldots \cdot 1}_{\geq 1} \geq k^k$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt damit:

$$a_{2n^2} = \sqrt[2n^2]{(2n^2)!} \geq \sqrt[2n^2]{(n^2)^{n^2}} = \sqrt[2n^2]{n^{2n^2}} = n$$

Da die natürlichen Zahlen, laut Vorlesung, nicht nach oben beschränkt sind, ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht nach oben beschränkt.

g) Es gilt

$$a_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = a_n = \prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-1}{k^2} = \prod_{k=2}^{n}\frac{(k+1)(k-1)}{k^2} = \frac{\frac{(n+1)!}{2}\cdot(n-1)!}{(n!)^2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} \to \frac{1}{2}$$

für $n \to \infty$.

h) Es gilt

$$\max\{a,b,c\} = \sqrt[n]{(\max\{a,b,c\})^n} \leqslant \sqrt[n]{a^n+b^n+c^n} \leqslant \sqrt[n]{3}\sqrt[n]{(\max\{a,b,c\})^n} \to \max\{a,b,c\} \qquad (n\to\infty),$$

also $a_n \to \max\{a,b,c\}$ für $n \to \infty$ nach Satz 6.2(3).

Aufgabe 15 (Übung)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Ist $b \in \mathbb{C}$ mit $|b| > 1$, so divergiert (b^n).

b) Ist (a_n) eine Folge, so gilt: (a_n) ist konvergent $\Rightarrow$ (a_n) ist beschränkt.

c) Ist $k \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$, so gilt

$$\frac{n^k}{z^n} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Lösungsvorschlag

a) Nach Folgerung 4.12 (1) finden wir, da $|b| > 1$, zu jedem $K > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|b|^N > K$. Diese Eigenschaft reicht aus, damit $|b|^n$ (oder alternativ auch eine beliebige Folge (a_n)) divergiert, denn: Sei $a \in \mathbb{C}$ beliebig. Wir wählen $K = |a| + 1$ und finden ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|b|^N > |a| + 1$. Somit gilt auch für $n \geqslant N$, dass

$$|b|^n = |b|^{n-N}|b|^N \geqslant 1 \cdot |b|^N > |a| + 1.$$

Schließlich gilt für $n \geqslant N$, dass

$$|b^n - a| \geqslant |b|^n - |a| > 1,$$

womit b^n nicht gegen a konvergieren kann, da zu jedem $0 < \varepsilon < 1$ kein $n_0(\varepsilon)$ gefunden werden kann mit $|b^n - a| < \varepsilon$ für $n \geqslant n_0(\varepsilon)$. Da a beliebig war, divergiert (b^n).
Hinweis: Alternativ verwenden wir direkt Aufgabenteil **b)** zusammen mit Folgerung 4.12(1), um zu sehen, dass die Folge unbeschränkt, also divergent, ist.

b) Die Folge (a_n) konvergiere gegen a. Somit existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < 1 \qquad \forall n \geqslant n_0.$$

Daraus folgt insbesondere

$$|a_n| \leqslant |a_n - a| + |a| < 1 + |a| \qquad \forall n \geqslant n_0,$$

womit diese unendlich vielen Folgenglieder beschränkt sind. Übrig bleiben nur noch endlich viele Zahlen $a_1, \ldots, a_{n_0-1}$, die durch den Betrag ihres größten Elements beschränkt sind. Es gilt also

$$|a_n| \leqslant \max\{|a_1|, \ldots, |a_{n_0-1}|, |a| + 1\} =: C < \infty$$

und (a_n) ist beschränkt.

c) Wir setzen $x = |z| - 1 > 0$. Für $n > 2k$ gilt $\frac{n}{2} > k$ und somit (addiere $\frac{n}{2}$ auf beiden Seiten und subtrahiere k) $n - k > \frac{n}{2}$. Mit dem Binomischen Satz folgt nun, dass

$$|z|^n = (1+x)^n = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} x^l \geqslant \binom{n}{k+1} x^{k+1} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!} x^{k+1} > \frac{(n-k)^{k+1}}{(k+1)!} x^{k+1} \geqslant \frac{n^{k+1} x^{k+1}}{2^{k+1}(k+1)!},$$

was wiederum

$$\left|\frac{n^k}{z^n}\right| \leqslant \frac{2^{k+1}(k+1)!}{x^{k+1}} \cdot \frac{1}{n} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

liefert.

Aufgabe 16 (Tutorium)

a) Die Folge (a_n) sei rekursiv definiert durch $a_1 := 0$, $a_{n+1} := \frac{5}{36} + a_n^2$ für $n \in \mathbb{N}$. Untersuchen Sie die Folge auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

b) Zu einer Folge (a_n) definiert man die Folge der *Cesàro-Mittel* durch

$$c_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

(i) Zeigen Sie: Konvergiert (a_n) gegen ein $a \in \mathbb{R}$, dann konvergiert auch (c_n) gegen a.

(ii) Geben Sie eine divergente Folge (a_n) an deren Folge von Cesàro-Mitteln konvergiert. Beweisen Sie die Konvergenz.

Lösungsvorschlag

a) Wir berechnen zunächst die möglichen Grenzwerte und beweisen im Anschluss die Konvergenz.

Wenn die rekursiv definierte Folge (a_n) gegen ein $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, dann können wir auf die Rekursion den Grenzwert $n \to \infty$ anwenden. Beachte, dass die Folge (a_{n+1}) ebenfalls gegen a konvergiert. Somit folgt

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{36} + a_n^2\right) = \frac{5}{36} + (\lim_{n\to\infty} a_n)^2 = \frac{5}{36} + a^2,$$

also $a^2 - a + \frac{5}{36} = 0$. Dies liefert die Möglichen Werte

$$a = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot \frac{5}{36}}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{\frac{16}{36}}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{3} = \begin{cases} \frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} \end{cases} .$$

Wir benutzen das Monotoniekriterium, um die Konvergenz zu zeigen. Zunächst sehen wir anhand der Definition, dass $a_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wegen $a_1 = 0$ und $a_{n+1} = \frac{5}{36} + a_n^2 \geqslant \frac{5}{36} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Behauptung: Es gilt $a_n \leqslant \frac{1}{6}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsanfang: Es gilt $a_1 = 0 \leqslant \frac{1}{6}$.
Induktionsschritt: Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$ (Induktionsvoraussetzung (IV)). Dann folgt

$$a_{n+1} = \frac{5}{36} + a_n^2 \overset{\text{(IV)},\, a_n \geqslant 0}{\leqslant} \frac{5}{36} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Behauptung: Es gilt $a_{n+1} \geqslant a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsanfang: Es gilt $a_2 = \frac{5}{36} + 0^2 = \frac{5}{36} \geqslant 0 = a_1$.
Induktionsschritt: Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$ (Induktionsvoraussetzung (IV)). Dann folgt

$$a_{n+2} = \frac{5}{36} + a_{n+1}^2 \overset{\text{(IV)}}{\geqslant} \frac{5}{36} + a_n^2 = a_{n+1}.$$

Alternativ gilt $a_{n+1} = (a_n - \frac{1}{6})(a_n - \frac{5}{6}) + a_n \overset{a_n \leqslant \frac{1}{6}}{\geqslant} a_n$.
Nach dem Monotoniekriterium konvergiert nun die Folge (a_n). Wegen $a_n \leqslant \frac{1}{6}$ folgt auch $a := \lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \frac{1}{6}$.

Aus dem ersten Teil folgt somit $a = \frac{1}{6}$.

b) (i) Sei $\varepsilon > 0$. Weil (a_n) gegen a konvergiert, gibt es zu $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_k - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $k \geq N$. Der Abstand der übrigen Folgenglieder zu a lässt sich nach oben beschränken, denn die Menge $\{|a_1 - a|, \ldots, |a_{N-1} - a|\}$ ist endlich, besitzt also ein Maximum

$$r := \max\{|a_1 - a|, \ldots, |a_{N-1} - a|\}.$$

Wähle nun $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $n_0 \geq N$ und $\frac{Nr}{n_0} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Dann gilt auch $\frac{r(N-1)}{n} \leq \frac{rN}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_0$. Sei nun $n \geq n_0$. Es gilt $a = \frac{n}{n} a = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a$. Somit erhalten wir durch Anwendung der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k - a\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (a_k - a)\right| &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n |a_k - a| \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1} |a_k - a| + \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n} |a_k - a| \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1} r + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{N-1}{n} r + \frac{n}{n}\frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Das zeigt, dass die Folge (c_n) gegen a konvergiert.

(ii) Es ist bekannt, dass die Folge mit den Gliedern $a_n = (-1)^n$ nicht konvergiert (siehe Vorlesung). Mit vollständiger Induktion sieht man unmittelbar ein, dass

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k = \begin{cases} 0, & n \text{ gerade} \\ -1, & n \text{ ungerade} \end{cases} \qquad \text{also insb.} \qquad \left|\sum_{k=1}^n (-1)^n\right| \leq 1.$$

Hieraus folgt

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^n\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^n\right| \leq \frac{1}{n},$$

sodass die Folge der Cesàro Mittel zu (a_n) nach Satz 2.10 b) gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 17 (Übung)

a) Zeigen Sie: Ist (a_n) eine Nullfolge und (b_n) eine beschränkte Folge, dann konvergiert die Folge mit den Gliedern $a_n b_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Gilt das auch, wenn (a_n) gegen einen anderen Wert als 0 konvergiert?

b) Sei $A \subset \mathbb{R}$ nicht leer und nach oben beschränkt. Beweise Sie die Existenz einer maximierenden Folge, d.h. einer Folge (a_n) mit $a_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup A$.

Lösungsvorschlag

a) Nach Voraussetung gibt es ein $r \geq 0$ so, dass $|b_n| \leq r$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen, dass die Folge mit den Gliedern $a_n b_n$ eine Nullfolge ist und müssen somit nur deren Beträge betrachten. Da $|a_n| \geq 0$, können wir wie folgt abschätzen:

$$0 \leq |a_n b_n| \leq |a_n||b_n| \leq r|a_n|.$$

Satz 6.2 (1) und (4)(ii) besagen, dass die Folge $(r|a_n|)$ gegen 0 konvergiert für $n \to \infty$. Somit können wir mit 6.1 (3) der Vorlesung schließen, dass $(a_n b_n)$ eine Nullfolge ist, insbesondere also konvergiert.

Das Beispiel $a_n = 1$ und $b_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zeigt, dass die Aussage nicht gilt, wenn man nur annimmt, dass (a_n) eine beliebige konvergente Folge ist.

b) Da A nicht leer und nach oben beschränkt ist, existiert $\sup A \in \mathbb{R}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ setze $\varepsilon_n := \frac{1}{n} > 0$. Nach Vorlesung existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $a_n \in A$ mit

$$a_n \geq \sup A - \varepsilon_n.$$

Da das Supremum eine obere Schranke von A ist, gilt außerdem $a_n \leq \sup A$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zusammengenommen erhalten wir

$$|a_n - \sup A| \leq \varepsilon_n = \frac{1}{n} \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

womit a_n gegen $\sup A$ konvergiert für $n \to \infty$ nach Satz 6.1(2).

Aufgabe 18 (Tutorium)

Geben Sie in **a)** bis **e)** reelle Folgen (für $n \in \mathbb{N}$) mit den jeweiligen Eigenschaften an (im Falle *divergent* jeweils mit einem beschränkten und einem unbeschränkten Beispiel in (ii) bis (v), falls möglich).

a) (a_n) ist beschränkt und divergent.

b) (a_n) ist konvergent und (b_n) divergent sowie $a_{2n} = b_{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) (a_n) ist konvergent und (b_n) divergent sowie $(a_n \cdot b_n)$ konvergent.

d) (a_n) ist konvergent und (b_n) divergent sowie $(a_n \cdot b_n)$ divergent

e) (a_n) und (b_n) sind jeweils divergent sowie $(a_n \cdot b_n)$ konvergent.

LÖSUNGSVORSCHLAG

a) Zum Beispiel $a_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Zum Beispiel $a_n = 1$ und $b_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ((b_n) beschränkt) oder $a_n = 0$ und $b_n = n(1 + (-1)^{n+1})$ ((b_n) unbeschränkt).

c) Zum Beispiel $a_n = \frac{1}{n}$ und $b_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ((b_n) beschränkt) oder $a_n = \frac{1}{n^2}$ und $b_n = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ((b_n) unbeschränkt).

d) Zum Beispiel $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ und $b_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ((b_n) und $(a_n b_n)$ beschränkt), $a_n = \frac{1}{n}$ und $b_n = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ((b_n) und $(a_n b_n)$ unbeschränkt) oder $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ und $b_n = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ((b_n) unbeschränkt und $(a_n b_n)$ beschränkt).(b_n) beschränkt und $(a_n b_n)$ unbeschränkt ist nicht möglich, da das Produkt zweier beschränkert Folgen (a_n) und (b_n) wieder beschränkt sein muss.

e) Zum Beispiel $a_n = b_n = (-1)^n$ (beide beschränkt), $a_n = n(1 + (-1)^n)$ und $b_n = n(1 + (-1)^{n+1})$ (beide unbeschränkt) oder $a_n = n(1 + (-1)^n)$ und $b_n = (1 + (-1)^{n+1})$ (je eine beschränkt und eine unbeschränkt).