Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

WS 2018/2019
08.11.2018

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

4. Übungsblatt

Aufgabe 19 (Übung)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Ist p ein (komplexes) Polynom ungleich der konstanten Nullfunktion, so folgt

$$\sqrt[n]{|p(n)|} \to 1 \qquad (n \to \infty).$$

b) Die Folge (a_n) sei gegeben durch die Folgenglieder $a_n = (1 - \frac{1}{n})^n$. Zeigen Sie, dass (a_n) konvergiert mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Aufgabe 20 (Tutorium)

a) Untersuchen Sie nachstehende Folgen ($n \in \mathbb{N}$) auf Konvergenz und geben Sie, falls existent, ihren Grenzwert an.

(i) $a_n = (1 + \frac{1}{n^2})^n$, (ii) $b_n = (1 + \frac{1}{2n+1})^{n-1}$.

b) Es sei $x \in (0,\infty)$ und (a_n) rekursiv definiert durch

$$a_1 > \sqrt{x} \ \text{ und } \ a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right).$$

Zeigen Sie: (a_n) ist konvergent und $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{x}$.

Aufgabe 21 (Übung)

a) Sie (a_n) eine Folge. Zeigen Sie: (a_n) ist konvergent $\Leftrightarrow$ (a_n) ist eine Cauchyfolge.

b) Wir betrachten die durch

$$a_1 := 1, \quad a_{n+1} := \frac{2 + a_n}{1 + a_n} \quad (n \geqslant 2)$$

rekursiv definierte Folge (a_n).

(i) Zeigen Sie, dass $1 \leqslant a_n \leqslant 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Beweisen Sie, dass $|a_n - a_m| \leqslant \frac{1}{4}|a_{n-1} - a_{m-1}|$ für alle $n, m \geqslant 2$.

(iii) Folgern Sie, dass die Folge (a_n) konvergiert und berechnen Sie ihren Grenzwert.

Aufgabe 22 (Tutorium)

a) Sei (a_n) eine Folge und die Teilfolgen (a_{2k}), (a_{2k+1}) und (a_{3k}) konvergieren. Beweisen oder widerlegen Sie (durch ein Gegenbeispiel), dass (a_n) konvergiert.

b) Finden Sie Beispiele für Folgen mit den folgenden Eigenschaften:

(i) (a_n) hat genau die Zahlen 2 und -1 als Häufungswerte.

(ii) (b_n) hat jede natürliche Zahl als Häufungswert.

(iii) (c_n) hat keinen Häufungswert und ist weder nach oben noch nach unten beschränkt.

(iv) (d_n) konvergiert gegen 2018, ist aber nicht monoton.

(v) (e_n) hat 0 als einzigen Häufungswert, jedoch konvergiert $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht.

Aufgabe 23 (Übung)

a) Seien (a_n) und (b_n) reelle, beschränkte Folgen. Zeigen Sie, dass

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$$

und finden Sie ein Beispiel um zu zeigen, dass im Allgemeinen keine Gleichheit gilt.

b) Seien M_1 und M_2 zwei abzählbare Mengen. Zeigen Sie, dass auch $M_1 \times M_2$ abzählbar ist.

Aufgabe 24 (Tutorium)

Bestimmen Sie alle Häufungswerte von (a_n) und geben Sie $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ an.

a) $a_n := (3 + (-1)^n)(-1)^{n(n+1)/2}$,

b) $a_n := (-1)^n \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n-1}$,

c) $a_n := \sqrt[n]{n + (-1)^n n}$,

d) $a_n := \left(-1 + \frac{1}{2} \cdot (-1)^{n+1}\right)^{n+1}$

e) $a_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2^n}, & n = 3k \quad \text{für ein } k \in \mathbb{N} \\ 2, & n = 3k-1 \quad \text{für ein } k \in \mathbb{N} \\ 2 + \frac{n+1}{n}, & n = 3k-2 \quad \text{für ein } k \in \mathbb{N} \end{cases}.$