Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

WS 2018/2019
15.11.2018

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

5. Übungsblatt

Aufgabe 25 (Übung)

a) Zeigen Sie, dass jede reelle Zahl $x \in [0,1)$ eine eindeutige Dezimaldarstellung besitzt, wenn man Neunerperioden ausschließt. Also: Zu jedem $x \in [0,1)$ existiert genau eine Folge (a_n) mit

- $a_n \in \{0,\dots,9\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
- $\forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geqslant N:\ a_n \neq 9$,
- $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$.

b) Beweisen Sie, dass $\mathbb{R}$ überabzählbar ist

Aufgabe 26 (Tutorium)

Betrachten Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{2}(-1)^n\right)^n}{n^2}$$

a) Was kann man mit dem Quotientenkriterium über die Konvergenz der obigen Reihe sagen?

b) Was kann man mit dem Wurzelkriterium über die Konvergenz der obigen Reihe sagen?

Aufgabe 27 (Übung)

a) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \cdots$$

konvergiert, die daraus durch Umordnung entstehende Reihe

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \cdots$$

jedoch divergiert.

b) Weisen Sie nach, dass das Cauchyprodukt der konvergenten Reihe aus **a)** mit sich selbst divergiert.

Aufgabe 28 (Tutorium)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n := \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

a) Zeigen Sie: Es gilt $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ divergent ist.

c) Warum ist das Leibnizkriterium hier nicht anwendbar?

Aufgabe 29 (Übung)

a) Beweisen Sie den *Cauchyschen Verdichtungssatz*: Ist (a_n) eine monoton fallende Folge mit $a_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konvergiert} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} \quad \text{konvergiert.}$$

b) Sei $0 < q \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q} \quad \text{konvergiert} \qquad \Longleftrightarrow \qquad q > 1.$$

Aufgabe 30 (Tutorium)

Untersuchen Sie die nachstehenden Reihen auf (absolute) Konvergenz.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{5^{2n-1}}{2^{5n}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{n!}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+(-1)^n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\binom{5n}{4n}^{-1}$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+4}{n^2-3n+1}$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^k q^n, \quad k \in \mathbb{N}, |q| < 1$

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{n}$