Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 5. Übungsblatt

Aufgabe 25 (Übung)

a) Zeigen Sie, dass jede reelle Zahl $x \in [0,1)$ eine eindeutige Dezimaldarstellung besitzt, wenn man Neunerperioden ausschließt. Also: Zu jedem $x \in [0,1)$ existiert genau eine Folge (a_n) mit

- $a_n \in \{0,\dots,9\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
- $\forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geqslant N:\ a_n \neq 9$,
- $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$.

b) Beweisen Sie, dass $\mathbb{R}$ überabzählbar ist

Lösungsvorschlag

a) <u>Existenz:</u> Sei $x \in [0,1)$. Wir konstruieren induktiv eine Folge (a_n), sodass

$$0 \leqslant x - \sum_{k=1}^{n} a_n 10^{-k} < 10^{-n} \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

was wegen $10^{-n} \to 0$ für $n \to \infty$ zur Folge hat, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$ konvergiert mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n} = x.$$

Induktionsanfang: Sei a_1 die größte ganze Zahl kleiner $10x$. Dann gilt $a_1 \in \{0,\dots,9\}$ und $0 \leqslant 10x - a_1 < 1$, also $0 \leqslant x - a_1 10^{-1} < 10^{-1}$.
Induktionsschluss: Für ein $n \in \mathbb{N}$ seien $a_1,\dots,a_n$ definiert und es gelte $0 \leqslant x - \sum_{k=1}^{n} a_n 10^{-k} < 10^{-n}$ (*Induktionsvoraussetzung*). Nun sei a_{n+1} die größte ganze Zahl kleiner $10^{n+1}(x - \sum_{k=1}^{n} a_n 10^{-k})$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $a_{n+1} \in \{0,\dots,9\}$ und außerdem

$$10^{n+1}\left(x - \sum_{k=1}^{n+1} a_k 10^{-k}\right) = 10^{n+1}\left(x - \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{-k}\right) - a_{n+1} \in [0,1),$$

somit

$$0 \leqslant x - \sum_{k=1}^{n+1} a_n 10^{-k} < 10^{-(n+1)}.$$

Haben wir nun eine Folge konstruiert, die ab einem (kleinsten) $N \in \mathbb{N}$ konstant den Wert 9 annimmt, so ersetzen wir diese Folge durch die Folge $(\tilde{a}_n)$, definiert durch

$$\tilde{a}_n = a_n \quad (n \leqslant N-2), \qquad \tilde{a}_{N-1} = a_{N-1} + 1, \qquad \tilde{a}_n = 0 \quad (n \geqslant N).$$

Es gilt

$$
\begin{aligned}
x &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n} = \sum_{n=1}^{N-1} a_n 10^{-n} + 9 \sum_{n=N}^{\infty} 10^{-n} \\
&= \sum_{n=1}^{N-1} \tilde{a}_n 10^{-n} - 10^{-(N-1)} + 9\left(\sum_{n=0}^{\infty} 10^{-n} - \sum_{n=0}^{N-1} 10^{-n} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{N-1} \tilde{a}_n 10^{-n} - 10^{-(N-1)} + 9\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - \frac{1-10^{-N}}{1-\frac{1}{10}} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{N-1} \tilde{a}_n 10^{-n} - 10^{-(N-1)} + 9\left(\frac{10^{-(N-1)}}{9} \right) = \sum_{n=1}^{N-1} \tilde{a}_n 10^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n 10^{-n}.
\end{aligned}
$$

Wir haben also eine Folge ohne "Neunerperiode" gefunden, die als Reihenwert x ergibt.
Eindeutigkeit: Sei $x \in [0,1)$. Seien (a_n) und (b_n) Folgen mit Folgengliedern in $\{0,\dots,9\}$, ohne "Neunerperiode" und mit

$$
x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n 10^{-n}.
$$

Behauptung: $(a_n) = (b_n)$. *Beweis:* Wir nehmen an, dass die beiden Folgen nicht übereinstimmen. Sei $N \in \mathbb{N}$ der kleinste Index, an dem sie sich unterscheiden und ohne Beschränkung der Allgemeinheit. Die beiden Summen $\sum_{n=1}^{N} a_n 10^{-n}$ und $\sum_{n=1}^{N} b_n 10^{-n}$ unterscheiden sich also um eine Differenz $\geqslant 10^{-N}$. Für die Differenz des Rests der Reihen gilt

$$
\sum_{n=N+1}^{\infty} (b_n - a_n) 10^{-n} < 9 \sum_{n=N+1}^{\infty} 10^{-n} = 9 \frac{10^{-(N+1)}}{1-\frac{1}{10}} = 10^{-N}.
$$

Die strikte Ungleichung hat ihren Ursprung darin, dass sich nicht jede Differenz $b_n - a_n$ auf 9 belaufen kann, denn ansonsten wären all diese $a_n = 0$ und $b_n = 9$, doch dies wurde ausgeschlossen. Insgesamt können die Reihen dadurch also nicht denselben Wert annehmen, ein Widerspruch.

b) Zuerst stellen wir fest, dass $\mathbb{R}$ überabzählbar ist, wenn $[0,1)$ überabzählbar ist. Nun nehmen wir an, letzteres wäre nicht der Fall. Dann können wir alle Elemente von $[0,1)$ auflisten. Wir tun dies anhand der eindeutigen Dezimaldarstellung aus Teil **a)**.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0.a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}a_{1,4}\cdots \\
x_2 &= 0.a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}a_{2,4}\cdots \\
x_3 &= 0.a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}a_{3,4}\cdots \\
x_4 &= 0.a_{4,1}a_{4,2}a_{4,3}a_{4,4}\cdots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Es reicht nun aus, ein $x_0 \in [0,1)$ zu konstruieren, welches nicht in dieser Liste auftaucht. Dazu definieren wir die entsprechende Folge der Dezimaldarstellung von x_0 wiefolgt

$$
a_{0,n} = \begin{cases} 0, & a_{n,n} \neq 0 \\ 1, & a_{n,n} = 0 \end{cases}
$$

Die so definierte Zahl in $[0,1)$ taucht nicht in der Liste auf, da sie sich an der n-ten Stelle der Dezimaldarstellung von der n-ten Zahl der Liste unterscheidet. Durch die Eindeutigkeit der Darstellung ist der Beweis erbracht und damit ein Widerspruch zur Annahme erreicht, womit $\mathbb{R}$ überabzählbar ist.

Aufgabe 26 (Tutorium)

Betrachten Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{2}(-1)^n\right)^n}{n^2}$$

a) Was kann man mit dem Quotientenkriterium über die Konvergenz der obigen Reihe sagen?

b) Was kann man mit dem Wurzelkriterium über die Konvergenz der obigen Reihe sagen?

Lösungsvorschlag

Sei $a_n = \frac{(1+\frac{1}{2}(-1)^n)^n}{n^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

a) Betrachte die Folge $(b_n) := \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. Für ihre Teilfolgen (b_{2n}) bzw. (b_{2n+1}) gilt

$$\begin{aligned} b_{2n} &= \frac{(2n)^2}{(2n+1)^2} \cdot \frac{(1-\frac{1}{2})^{2n+1}}{(1+\frac{1}{2})^{2n}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} \\ b_{2n+1} &= \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2} \cdot \frac{(1+\frac{1}{2})^{2n+2}}{(1-\frac{1}{2})^{2n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{2n+1}}\right)^2 \cdot 3^{2n+2} \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $\lim_{n\to\infty} b_{2n} = 0$ und $\lim_{n\to\infty} b_{2n+1} = \infty$ gilt $\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1$ und $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty > 1$. Eine Entscheidung mit dem Quotientenkriterium ist also nicht möglich.

b) Betrachte die Folge $(b_n) := \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$. Für ihre Teilfolge (b_{2n}) gilt:

$$\lim_{n\to\infty} b_{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}}{\left(\sqrt[2n]{2n}\right)^2} = \frac{3}{2}$$

Also gilt $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \geq \frac{3}{2} > 1$. Nach dem Quotientenkriterium folgt die Divergenz von $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

Hinweis: Tatsächlich sieht man die Divergenz auch schon daran, dass (a_{2k}) divergiert und (a_n) somit keine Nullfolge ist, die Aufgabe diente nur als einfaches Beispiel dafür, dass nicht alle Kriterien dieselbe Aussage liefern müssen.

Aufgabe 27 (Übung)

a) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \cdots$$

konvergiert, die daraus durch Umordnung entstehende Reihe

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \cdots$$

jedoch divergiert.

b) Weisen Sie nach, dass das Cauchyprodukt der konvergenten Reihe aus **a)** mit sich selbst divergiert.

Lösungsvorschlag

a) Die Reihe

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$$

konvergiert nach dem Leibnizkriterium, weil $(\frac{1}{\sqrt{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Es gilt

$$1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right). \qquad (*)$$

Für jedes $n\in\mathbb{N}$ ist

$$\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\geq\frac{1}{\sqrt{4n}}+\frac{1}{\sqrt{4n}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}=\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\geq 0.$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ divergiert, ist $(1-\frac{1}{\sqrt{2}})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ eine divergente Minorante für die Reihe in $(*)$.

b) Wie wir gesehen haben, ist die konvergente Reihe aus **a)** gegeben durch

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}.$$

Sei nun $a_n:=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ für $n\in\mathbb{N}_0$. Für das Cauchyprodukt $\sum_{n=0}^{\infty}c_n$ der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ mit sich selbst gilt

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}a_k=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}}\cdot\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}=(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{n-k+1}\cdot\sqrt{k+1}}.$$

Mit

$$0\leq(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=a-2\sqrt{a}\sqrt{b}+b \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{a}\sqrt{b}\leqslant\tfrac{1}{2}(a+b) \qquad (\text{für } a,b>0)$$

folgt

$$\begin{aligned}|c_n|&=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{n-k+1}\cdot\sqrt{k+1}}\geq\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\frac{1}{2}(n-k+1+k+1)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{n+2}\\&=\frac{2}{n+2}\sum_{k=0}^{n}1=\frac{2(n+1)}{n+2}=\frac{2+2/n}{1+2/n}\to 2 \quad (n\to\infty).\end{aligned}$$

Demnach ist (c_n) keine Nullfolge und damit $\sum_{n=0}^{\infty}c_n$ divergent.

Aufgabe 28 (Tutorium)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n := \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

a) Zeigen Sie: Es gilt $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ divergent ist.

c) Warum ist das Leibnizkriterium hier nicht anwendbar?

Lösungsvorschlag

a) Für $n = 1$ ist $a_n = 2 > 0$. Für $n > 1$ ist $\sqrt{n} < n$ bzw. $\frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$. Deshalb gilt:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} > \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0$$

Die Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 ist klar wegen $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ und $\frac{1}{n} \to 0$ für $n \to \infty$.

b) Nach dem Leibniz-Kriterium ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konvergent. Wäre die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergent, so wäre auch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

konvergent. Aus der Vorlesung ist jedoch bekannt, dass die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent ist. Also muss die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ divergieren.

c) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht monoton. Dies könnten wir auch relativ schnell (aber unschön) zeigen, indem wir die Differenzen $a_{2k} - a_{2k+1}$ und $a_{2k+1} - a_{2k+2}$ betrachten, es ist jedoch nicht nötig, denn: Wäre (a_n) monoton fallend, so wären alle Voraussetzungen des Leibnizkriteriums erfüllt und $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ würde konvergieren, ein Widerspruch zu **b)**.

Aufgabe 29 (Übung)

a) Beweisen Sie den *Cauchyschen Verdichtungssatz*: Ist (a_n) eine monoton fallende Folge mit $a_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konvergiert} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} \quad \text{konvergiert.}$$

b) Sei $0 < q \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q} \quad \text{konvergiert} \qquad \Longleftrightarrow \qquad q > 1.$$

Lösungsvorschlag

a) Seien $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ und $t_n := \sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k}$.

Wir nehmen zunächst an, dass $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergiert. Für $n \leq 2^i$ gilt (da (a_n) monoton fallend ist)

$$0 \leq s_n \leq a_1 + (a_2 + a_3) + \ldots + (a_{2^i} + \ldots + a_{2^{i+1}-1})$$
$$\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^i a_{2^i} = t_i \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} < \infty.$$

Also konvergiert auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, da (s_n) monoton wächst $(a_n \geqslant 0)$ und nach oben beschränkt ist.

Umgekehrt nehmen wir nun an, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert. Für $n > 2^i$ gilt dann

$$\infty > \sum_{k=1}^{\infty} a_k \geq s_n \geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \ldots + (a_{2^{i-1}+1} + \ldots + a_{2^i}) \geq \frac{1}{2} a_1 + a_2 + 2a_4 + \ldots + 2^{i-1} a_{2^i} = \frac{1}{2} t_i.$$

Also konvergiert dann auch $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x_{2^k}$, da (t_i) monoton wächst $(a_n \geqslant 0)$ und nach oben beschränkt ist.

b) Mit $a_k := \frac{1}{k^q}$ haben wir

$$2^k a_{2^k} = 2^k (2^k)^{-q} = 2^{(1-q)k}.$$

Damit ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \qquad \text{mit } x := 2^{1-q}.$$

Die Reihe konvergiert genau dann, wenn $|x| < 1$, also wenn $q > 1$. Mit Teil **a)** konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^q}$ also genau dann, wenn $q > 1$.

Aufgabe 30 (Tutorium)

Untersuchen Sie die nachstehenden Reihen auf (absolute) Konvergenz.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^{2n+1}}{2^{5n-1}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n!}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n + (-1)^n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \binom{5n}{4n}^{-1}$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^2 - 3n + 1}$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^k q^n, \quad k \in \mathbb{N}, |q| < 1$

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n}$

Lösungsvorschlag

a) Sei $a_n := (\frac{n-1}{n})^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Es gilt (siehe **Aufgabe 16 f)**)

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{\mathrm{e}} \neq 0 \qquad (n \to \infty).$$

Damit ist a_n keine Nullfolge und $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n-1}{n})^n$ divergent.

b) Sei $a_n := (-1)^n \frac{5^{2n-1}}{2^{5n}}$. Es gilt

$$a_n = (-1)^n \frac{\frac{1}{5} \cdot (5^2)^n}{(2^5)^n} = \frac{1}{5}\left(-\frac{25}{32}\right)^n.$$

Wegen $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{5}} \frac{25}{32} \to \frac{25}{32} < 1$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^{2n-1}}{2^{5n}}$ konvergent. Genauer handelt es sich um eine geometrische Reihe (bis auf den fehlenden nullten Summanden) und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^{2n-1}}{2^{5n}} = \frac{1}{5}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{25}{32}\right)^n - 1\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1-(-\frac{25}{32})} - 1\right) = -\frac{5}{57}.$$

Außerdem konvergiert die Reihe auch absolut mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{2n-1}}{2^{5n}} = \frac{1}{5}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{25}{32}\right)^n - 1\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1-\frac{25}{32}} - 1\right) = \frac{5}{7}.$$

c) Sei $a_n := \frac{\sqrt[n]{n}}{n!}$. Da $\sqrt[n]{n} \to 1$ für $n \to \infty$, ist $\sqrt[n]{n}$ beschränkt, also $\sqrt[n]{n} \leqslant C$ für eine Konstante $C > 0$. Somit folgt

$$|a_n| = \frac{\sqrt[n]{n}}{n!} \leqslant \frac{C}{n!}.$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n!}$ konvergiert (gegen $C(\mathrm{e}-1)$, siehe Vorlesung), konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n!}$ absolut nach dem Majorantenkriterium.

d) Sei $a_n := \frac{(-1)^n}{2n+(-1)^n}$. Es gilt

$$|a_n| = \frac{1}{2n+(-1)^n} \geqslant \frac{1}{2n+1} > \frac{1}{3n}.$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$ divergiert (als Vielfaches der harmonischen Reihe), konvergiert die Reihe nicht absolut. Es gilt allerdings $a_n = (-1)^n b_n$ mit $b_n = \frac{1}{2n+(-1)^n}$. Diese Folge ist positiv und konvergiert wegen

$$\frac{1}{2n+(-1)^n} \leqslant \frac{1}{2n-1} \leqslant \frac{1}{n} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

gegen 0. Außerdem ist sie monoton fallend wegen

$$b_{2k} - b_{2k+1} = \frac{1}{2(2k)+1} - \frac{1}{2(2k+1)-1} = 0,$$

$$b_{2k+1} - b_{2k+2} = \frac{1}{2(2k+1)-1} - \frac{1}{2(2k+2)+1} = \frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+5} = \frac{4}{(4k+1)(4k+5)} > 0$$

für $k \in \mathbb{N}$. Nach dem Leibnitzkriterium konvergiert die Ausgangsreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+(-1)^n}$ demnach.

e) Sei $a_n := \frac{n!}{n^n}$. Es gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{(1-\frac{1}{n})^n} \to \frac{1}{\mathrm{e}} < 1 \qquad (n \to \infty).$$

Deshalb konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ absolut nach dem Quotientenkriterium.

f) Sei $a_n := \frac{1}{2^n}(\frac{n+1}{n})^{n^2}$. Es gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to \frac{\mathrm{e}}{2} > 1 \qquad (n \to \infty).$$

Deshalb divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}(\frac{n+1}{n})^{n^2}$ nach dem Wurzelkriterium.

g) Sei $a_n := (-1)^n(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2})$. Es gilt

$$|a_n| = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} < \frac{1}{n^2}$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2})$ absolut.

h) Sei $a_n := \binom{5n}{4n}^{-1}$. Es gilt

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(4(n+1))!(n+1)!(5n)!}{(5(n+1))!(4n)!n!} &= \frac{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)(n+1)}{(5n+5)(5n+4)(5n+3)(5n+2)(5n+1)} \\ &= \frac{(4+\frac{4}{n})(4+\frac{3}{n})(4+\frac{2}{n})(4+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})}{(5+\frac{5}{n})(5+\frac{4}{n})(5+\frac{3}{n})(5+\frac{2}{n})(5+\frac{1}{n})} \to \frac{4^4}{5^5} < 1 \qquad (n \to \infty).\end{aligned}$$

Deshalb ist $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{5n}{4n}^{-1}$ absolut konvergent nach dem Quotientenkriterium.

i) Sei $a_n := \frac{n+4}{n^2-3n+1}$. Für $n \geqslant 3$ gilt $-3n+1 \leqslant 0$. Daher folgt

$$a_n \geqslant \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

für $n \geqslant 3$. Da die harmonische Reihe divergiert, divergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$ nach dem Minorantenkriterium

j) Sei $a_n := n^k q^n$. Es gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = |q|\sqrt[n]{n^k} \to |q| < 1 \qquad (n \to \infty).$$

Also konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} n^k q^n$ absolut nach dem Wurzelkriterium.

k) Sei $a_n := \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$. Es gilt

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} > \frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1})} = \frac{1}{2(n+1)} \geqslant \frac{1}{4n}.$$

Deshalb divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$ - wie die harmonische Reihe - nach dem Minorantenkriterium.

l) Sei $a_n := \frac{\mathrm{i}^n}{n}$. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n}$ konvergiert nicht absolut, da $|a_n| = \frac{1}{n}$. Sei $n = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$a_{2k} = \frac{\mathrm{i}^{2k}}{2k} = \frac{(-1)^k}{2k}.$$

Sei nun $n = 2k + 1$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$a_{2k+1} = \frac{\mathrm{i}^{2k+1}}{2k+1} = \mathrm{i}\frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Deshalb gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_n = \sum_{k=0} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Da die beiden Folgen $(\frac{1}{2k})$ und $(\frac{1}{2k+1})$ monoton fallende Nullfolgen sind, konvergieren beide Reihen nach dem Leibnitzkriterium und damit per Definition auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n}$.