Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

WS 2018/2019
22.11.2018

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

6. Übungsblatt

Aufgabe 31 (Übung)

a) Rechnen Sie nach, dass die aus der Vorlesung auf $\mathbb{R}$ bekannten Formeln

$$e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z), \qquad \sin^2(z) + \cos^2(z) = 1,$$

auch für $z \in \mathbb{C}$ gelten.

b) Zeigen Sie, dass die Sinusfunktion ungerade und die Kosinusfunktion gerade ist, also

$$\sin(-z) = -\sin(z), \qquad \cos(-z) = \cos(z),$$

für alle $z \in \mathbb{C}$.

c) Beweisen Sie, dass für $z = x + iy$

$$\sin(z) = \sin(x)\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) + i\cos(x)\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right),$$

$$\cos(z) = \cos(x)\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) - i\sin(x)\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right),$$

und schließen Sie daraus, dass die beiden Funktionen auf $\mathbb{C}$ unbeschränkt sind.

Aufgabe 32 (Tutorium)

Zeigen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme die folgenden Formeln für alle $z, w \in \mathbb{C}$.

a) $\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$

b) $\cos(2z) = 1 - 2\sin^2(z) = 2\cos^2(z) - 1$

c) $\sin(z) + \sin(w) = 2\sin\left(\frac{z+w}{2}\right)\cos\left(\frac{z-w}{2}\right)$

d) $\cos(z) + \cos(w) = 2\cos\left(\frac{z+w}{2}\right)\cos\left(\frac{z-w}{2}\right)$

Aufgabe 33 (Übung)

a) Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die folgenden Potenzreihen? Bestimmen Sie im Falle der Konvergenz den Reihenwert.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$

b) Welche Funktionen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ werden durch die folgenden Potenzreihen dargestellt?

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!} z^n$ (ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z+1)^{2n+2}$

c) Bestimmen Sie jeweils eine Potenzreihenentwicklung der Funktion f um die angegebene Entwicklungsstelle z_0. Wie groß ist dabei der Konvergenzradius?

(i) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \sin z, \quad z_0 = 1$

(ii) $f\colon \mathbb{C} \setminus \{-1, \frac{1}{2}\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{1-z}{1-z-2z^2}, \quad z_0 = 0$

Hinweis: In Teil (ii) hilft die Gleichung $\frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{\frac{2}{3}}{1+z} + \frac{\frac{1}{3}}{1-2z}$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, \frac{1}{2}\}$ weiter.

Aufgabe 34 (Tutorium)

Für welche $x \in \mathbb{R}$ bzw. $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die folgenden Potenzreihen?

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2} x^n$ **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} (z-2\mathrm{i})^n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{n(1+(-1)^n)} x^{2n}$ **d)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) z^n$

e) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n^2}$ **f)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3\mathrm{i})^n}{n^2}$

Aufgabe 35 (Übung)

a) Es sei

$$b(x) = \begin{cases} 1+x & \text{für } x \in [-1,0], \\ 1-x & \text{für } x \in (0,1], \\ 0 & \text{für } x < -1 \text{ oder } x > 1. \end{cases}$$

Wir definieren $f_n(x) = b(x-n)$ und $g_n(x) = \frac{f_n(x)}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Untersuchen Sie die Funktionenfolgen (f_n) und (g_n) auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

b) Sei $h_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0, \infty)$. Untersuchen Sie die Funktionenfolge (h_n) auf punktweise Konvergenz. Wieso kann sie nicht gleichmäßig konvergieren? Konvergiert sie auf $(0, \infty)$ bzw. $[a, \infty)$ mit $a > 0$ gleichmäßig?

Aufgabe 36 (Tutorium)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen und -reihen jeweils auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz auf den angegebenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$).

a) $f_n(x) = \sqrt[n]{n^2 x}$, $x \in [a, 1]$, $0 < a < 1$,

b) $g_n(x) = nx(1-x)^n$, $x \in [0, 1]$,

c) $\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x)$, $h_n(x) = x^n(1-x)$, $x \in (-1, 1]$,

d) $\sum_{n=1}^{\infty} i_n(x)$, $i_n(x) = \frac{1}{n^2+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.