Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

WS 2018/2019
29.11.2018

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

7. Übungsblatt

Aufgabe 37 (Übung)

a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie mit Hilfe der Stetigkeitsdefinition, dass f in jedem Punkt $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ unstetig ist.

(ii) Begründen Sie mit Hilfe des ε-δ-Kriteriums, dass f in 0 stetig ist.

b) Bestimmen Sie jeweils alle Stellen, in denen die Funktion f stetig ist.

(i) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} & \text{für } x \notin \{1,3\}, \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 1, \\ 0 & \text{für } x = 3. \end{cases}$

(ii) $f\colon [-7,3] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \min\{x^2+2x-15,\ x^3\} & \text{für } x \in [-7,-5] \cup [-1,3], \\ x+5 & \text{für } x \in (-5,-1). \end{cases}$

Aufgabe 38 (Tutorium)

a) Berechnen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte.

(i) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{8x^3+2x^2+1}{2x^3+7x}$, (ii) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-9x^2+16x-4}{3x^3-10x^2+9x-2}$,

(iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+x}-2}{x}$, (iv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin(x)}-1}{x}$.

Hinweis: Verwenden Sie in (iii) die Gleichung $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ für $a,b\in\mathbb{R}$.

b) Sei $a \in \mathbb{R}$ fest. Geben Sie die Stetigkeitsstellen der Funktion f an.

(i) $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x^2-4)(x-1)} & \text{für } x \in [0,1), \\ a & \text{für } x = 1. \end{cases}$

(ii) $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{|x|}+\sqrt{\frac{1}{|x|}}} - \sqrt{\frac{1}{|x|}-\sqrt{\frac{1}{|x|}}} & \text{für } x \neq 0, \\ a & \text{für } x = 0. \end{cases}$

Aufgabe 39 (Übung)

Die Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{für } 0 < |x| \leq 1, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases} .$$

a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

b) Bestimmen Sie den Wertebereich $f([-1,1])$ von f.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $|f(x)| \leq 1$ für alle $x \in [-1,1]$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass f eine Umkehrfunktion besitzt. Berechnen Sie f^{-1}.

d) Beweisen Sie, dass f^{-1} streng monoton wachsend ist.

e) Ist f streng monoton wachsend? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 40 (Tutorium)

a) Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und seien $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(a) > g(a)$ und $f(b) < g(b)$. Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in (a,b)$ existiert mit $f(x_0) = g(x_0)$.

b) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\frac{1}{1+x^2} = \sqrt{x}$$

eine Lösung $x_0 \geqslant 0$ besitzt.

c) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) = f(1)$. Zeigen Sie, dass dann ein $x_1 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ existiert mit der Eigenschaft:

$$f(x_1) = f\left(\frac{1}{2} + x_1\right).$$

Aufgabe 41 (Übung)

a) Zeigen Sie: Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a,b] \to [a,b]$ stetig, so existiert ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) = x_0$.

b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(0) = 1$ und $f(x+y) \leq f(x)f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie die Äquivalenz

$$f \text{ ist stetig.} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ ist stetig in } 0.$$

Aufgabe 42 (Tutorium)

a) Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt, so existiert ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) = x_0$.

b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(x+y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie die Äquivalenz

$$f \text{ ist stetig.} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ ist stetig in } 0.$$