Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

WS 2018/2019
29.11.2018

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 37 (Übung)

a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie mit Hilfe der Stetigkeitsdefinition, dass f in jedem Punkt $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ unstetig ist.

(ii) Begründen Sie mit Hilfe des ε-δ-Kriteriums, dass f in 0 stetig ist.

b) Bestimmen Sie jeweils alle Stellen, in denen die Funktion f stetig ist.

(i) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} & \text{für } x \notin \{1,3\}, \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 1, \\ 0 & \text{für } x = 3. \end{cases}$

(ii) $f\colon [-7,3] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \min\{x^2+2x-15,\, x^3\} & \text{für } x \in [-7,-5] \cup [-1,3], \\ x+5 & \text{für } x \in (-5,-1). \end{cases}$

Lösungsvorschlag

a) (i) Wir zeigen, dass f weder auf $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, noch auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ stetig ist.

Sei $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definiere $x_n := x + \frac{\sqrt{2}}{n}$. Wegen $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist $x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ und $f(x_n) = 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0 \neq x = f(x)$. Infolgedessen ist f nicht stetig in x. Da $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ beliebig war, ist f nicht stetig auf $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Wie wir aus der Vorlesung wissen, gibt es eine Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rationaler Zahlen mit $q_n \xrightarrow{n\to\infty} x$. Dann gilt $f(q_n) = q_n \xrightarrow{n\to\infty} x \neq 0 = f(x)$. Infolgedessen ist f nicht stetig in x. Da $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ beliebig war, ist f nicht stetig auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(ii) Setze $x_0 := 0$. Wegen $x_0 \in \mathbb{Q}$ gilt $f(x_0) = x_0 = 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Wir müssen begründen, dass es ein $\delta > 0$ so gibt, dass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt. Wir wählen $\delta = \varepsilon > 0$. Dann folgt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x)| = \left\{ \begin{array}{ll} |x| & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{array} \right\} \leq |x| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon.$$

Das war zu zeigen.

b) (i) Die rationale Funktion $x \mapsto \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ ist nach einem Beispiel der Vorlesung außerhalb der Nullstellenmenge des Nenners stetig. Wegen $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$ verschwindet der

Nenner für $x=1$ oder $x=3$. Daher ist $x \mapsto \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ auf $\mathbb{R}\setminus\{1,3\}$ stetig, so dass auch f auf $\mathbb{R}\setminus\{1,3\}$ stetig ist. Nun gilt für alle $x \in \mathbb{R}\setminus\{1,3\}$

$$f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-3)} = \frac{x-2}{x-3}.$$

Somit ist $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1-2}{1-3} = \frac{1}{2} = f(1)$, d.h. f ist in 1 stetig. Da 3 eine Nullstelle des Nenners und keine Nullstelle des Zählers von $\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ ist, existiert der Grenzwert $\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ nicht. Also ist f in 3 unstetig (unabhängig davon, was der Funktionswert $f(3)$ tatsächlich ist). Fazit: f ist auf $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ stetig.

(ii) Wegen $x^2+2x-15=(x-3)(x+5)$ ist dieser Ausdruck für $x \in [-7,-5]$ nichtnegativ, x^3 hingegen negativ, also gilt $f(x)=x^3$ für $x\in[-7,-5]$. Für $x\in[-1,0)$ ist $x^3 \in [-1,0)$, aber $x^2+2x-15 \leqslant 1+0-15=-14$, also gilt $f(x)=x^2+2x-15$ für $x\in[-1,0)$. Für $x \in [0,3]$ ist $(x-3)(x+5)\leq 0$ und $x^3 \geq 0$, also gilt $f(x)=x^2+2x-15$ für $x\in[0,3]$. Das Minimum zweier stetiger Funktionen g und h ist als Komposition stetiger Funktionen stetig: $\min\{g,h\} = \frac{g+h-|g-h|}{2}$ (punktweise nachrechnen, Betrag ist stetig nach Satz 8.1). Daher ist f jedenfalls außerhalb von $\{-5,-1\}$ stetig. Wegen

$$\lim_{x\to -1-} f(x) = \lim_{x\to-1-} x+5 = 4 \neq -16 = \lim_{x\to -1+} x^2+2x-15 = \lim_{x\to -1+} f(x)$$

ist f in -1 unstetig. Da x^3 und $x+5$ an der Stelle -5 verschieden sind, erhält man entsprechend, dass f nicht stetig in -5 ist.

Aufgabe 38 (Tutorium)

a) Berechnen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte.

(i) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{8x^3+2x^2+1}{2x^3+7x}$, (ii) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-9x^2+16x-4}{3x^3-10x^2+9x-2}$,

(iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+x}-2}{x}$, (iv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{\sin(x)}-1}{x}$.

Hinweis: Verwenden Sie in (iii) die Gleichung $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ für $a,b\in\mathbb{R}$.

b) Sei $a\in\mathbb{R}$ fest. Geben Sie die Stetigkeitsstellen der Funktion f an.

(i) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x^2-4)(x-1)} & \text{für } x\in[0,1), \\ a & \text{für } x=1. \end{cases}$

(ii) $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{|x|}+\sqrt{\frac{1}{|x|}}} - \sqrt{\frac{1}{|x|}-\sqrt{\frac{1}{|x|}}} & \text{für } x\neq 0, \\ a & \text{für } x=0. \end{cases}$

Lösungsvorschlag

a) (i) Mit dem gleichen Standardtrick wie bei Folgen erhalten wir, dass dieser Grenzwert existiert und dass gilt

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{8x^3+2x^2+1}{2x^3+7x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{8+2x^{-1}+x^{-3}}{2+7x^{-2}} = \frac{8+0+0}{2+0} = 4.$$

(ii) Zähler und Nenner haben 2 als Nullstelle. Polynomdivision liefert

$$\begin{aligned} x^3-9x^2+16x-4 &= (x-2)(x^2-7x+2) \\ 3x^3-10x^2+9x-2 &= (x-2)(3x^2-4x+1). \end{aligned}$$

Sofern die Ausdrücke definiert sind, gilt also

$$\frac{x^3-9x^2+16x-4}{3x^3-10x^2+9x-2} = \frac{(x-2)(x^2-7x+2)}{(x-2)(3x^2-4x+1)} = \frac{x^2-7x+2}{3x^2-4x+1}.$$

Weiter ist 2 keine Nullstelle von $3x^2-4x+1$. Wir schließen, dass der gesuchte Grenzwert existiert und gegeben ist durch

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-9x^2+16x-4}{3x^3-10x^2+9x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-7x+2}{3x^2-4x+1} = -\frac{8}{5}.$$

(iii) Setzen wir zur Abkürzung $a := \sqrt[3]{8+x}$ und $b := 2$, so ergibt sich mit dem Hinweis die Darstellung

$$\sqrt[3]{8+x}-2 = a-b = \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2} = \frac{(\sqrt[3]{8+x})^3-2^3}{(\sqrt[3]{8+x})^2+2\sqrt[3]{8+x}+2^2} = \frac{x}{(\sqrt[3]{8+x})^2+2\sqrt[3]{8+x}+4}.$$

Folglich hat man

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{8+x}-2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{8+x})^2+2\sqrt[3]{8+x}+4} = \frac{1}{(\sqrt[3]{8+0})^2+2\sqrt[3]{8+0}+4} = \frac{1}{12}.$$

(iv) Wir berechnen zunächst (siehe Vorlesung)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x-1}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots)-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+\ldots}{1} = 1. \end{aligned}$$

und

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+-\ldots}{x} = \lim_{x\to 0} 1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+-\ldots = 1.$$

Aus $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ folgt insbesondere $\sin(x) \neq 0$ in der Nähe von 0. Für jede Folge (x_n) mit $x_n \to 0$ und $x_n \neq 0$ hat man also $\sin(x_n) \to 0$ (da der Sinus stetig ist) und $\sin(x_n) \neq 0$ für fast alle n. Daher folgt mit $\lim_{y\to 0} \frac{\mathrm{e}^y-1}{y} = 1$, dass

$$\frac{\mathrm{e}^{\sin x_n}-1}{\sin x_n} \xrightarrow{n\to\infty} 1, \qquad \text{also} \qquad \frac{\mathrm{e}^{\sin x}-1}{\sin x} \xrightarrow{x\to 0} 1.$$

Nach den Grenzwertsätzen existiert der zu untersuchende Grenzwert und es gilt

$$1 = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{\sin x}-1}{\sin x}\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^{\sin x}-1}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{\sin x}-1}{x}.$$

b) (i) f ist als Komposition stetiger Funktionen (ohne Nullstellen im Nenner) für alle $x \in [0,1)$ stetig. Für alle $x \in [0,1)$ gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x^2-4)(x-1)} = \frac{1}{x-1} \cdot \left(1 + \frac{3}{(x^2-4)}\right) = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{(x^2-4)+3}{(x^2-4)} \\ &= \frac{1}{x-1} \cdot \frac{x^2-1}{(x^2-4)} = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{(x^2-4)} = \frac{x+1}{(x^2-4)} \end{aligned}$$

Folglich muss ist f für $a = \lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{x+1}{(x^2-4)} = -\frac{2}{3}$ auf ganz $[0,1]$ stetig und für $a \neq -\frac{2}{3}$ nur auf $[0,1)$.

(ii) f ist als Komposition stetiger Funktionen (ohne Nullstellen im Nenner) für alle $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$ stetig. Sei $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$ und definiere $y := \frac{1}{\sqrt{|x|}}$. Dann gilt mit der dritten binomischen Formel:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{\frac{1}{|x|} + \sqrt{\frac{1}{|x|}}} - \sqrt{\frac{1}{|x|} - \sqrt{\frac{1}{|x|}}} = \sqrt{y^2+y} - \sqrt{y^2-y} = \frac{y^2+y-(y^2-y)}{\sqrt{y^2+y}+\sqrt{y^2-y}} \\ &= \frac{2y}{y\left(\sqrt{1+\frac{1}{y}} + \sqrt{1-\frac{1}{y}}\right)} = \frac{2}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{y}} + \sqrt{1-\frac{1}{y}}\right)} = \frac{2}{\left(\sqrt{1+\sqrt{|x|}} + \sqrt{1-\sqrt{|x|}}\right)} \end{aligned}$$

Folglich ist f für $a = \lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{2}{\left(\sqrt{1+\sqrt{|x|}}+\sqrt{1-\sqrt{|x|}}\right)} = 1$ auf ganz $[-1,1]$ stetig und für $a \neq 1$ nur auf $[-1,1] \setminus \{0\}$.

Aufgabe 39 (Übung)

Die Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{für } 0 < |x| \leq 1, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

b) Bestimmen Sie den Wertebereich $f([-1,1])$ von f.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $|f(x)| \leq 1$ für alle $x \in [-1,1]$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass f eine Umkehrfunktion besitzt. Berechnen Sie f^{-1}.

d) Beweisen Sie, dass f^{-1} streng monoton wachsend ist.

e) Ist f streng monoton wachsend? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungsvorschlag

a) Als Komposition stetiger Funktionen ist f auf $[-1,1] \setminus \{0\}$ stetig. Für $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$ gilt

$$f(x) = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \cdot \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-(1-x^2)}{x(1+\sqrt{1-x^2})} = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}.$$

Demnach gilt $\lim_{x\to0} f(x) = 0 = f(0)$, und damit ist f auch stetig in 0.

b) Wir zeigen zunächst $|f(x)| \leq 1$ für alle $x \in [-1,1]$: Für $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$ gilt (siehe **a)**)

$$|f(x)| = \frac{|x|}{1 + \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\geq 0}} \leq |x| \leq 1.$$

Wegen $f(0) = 0$ ist $|f(x)| \leq 1$ für alle $x \in [-1,1]$ bewiesen. Hieraus folgt $f([-1,1]) \subset [-1,1]$.

Nun zeigen wir $[-1,1] \subset f([-1,1])$. Sei dazu $y_0 \in [-1,1]$. Dann liegt y_0 zwischen $f(-1) = -1$ und $f(1) = 1$. Aufgrund der Stetigkeit von f existiert nach dem Zwischen-wertsatz ein $x_0 \in [-1,1]$ mit $y_0 = f(x_0) \in \{f(x) : \ x \in [-1,1]\} = f([-1,1])$. Da $y_0 \in [-1,1]$ beliebig war, folgt $[-1,1] \subset f([-1,1])$.

Insgesamt ergibt sich $f([-1,1]) = [-1,1]$.

c) Um die Existenz der Umkehrfunktion von f nachzuweisen, verwenden wir folgendes Resultat: Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Funktion. Gelingt es, die Gleichung $y = f(x)$ durch Äquivalenzumformungen (!) in die Form $x = g(y)$ zu bringen (wobei $x \in X$, $y \in Y$ und $g : Y \to X$), dann ist f bijektiv und die Umkehrfunktion von f lautet g.

Für $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$ gilt

$$\begin{aligned}
y = f(x) \quad &\iff \quad y = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \quad \iff \quad 1 - xy = \sqrt{1-x^2} \\
&\overset{1-xy\geq 0}{\iff} \quad 1 - 2xy + x^2y^2 = 1 - x^2 \quad \iff \quad x^2(1+y^2) = 2xy \\
&\overset{x\neq 0}{\iff} \quad x(1+y^2) = 2y \quad \iff \quad x = \frac{2y}{1+y^2}.
\end{aligned}$$

Für $x = 0$ gilt $y = f(0) = 0$, also gilt auch hier $x = \frac{2y}{1+y^2}$. Die Rechnung zeigt: f besitzt eine Umkehrfunktion, die durch

$$f^{-1} : \underbrace{[-1,1]}_{=f([-1,1])} \to [-1,1], \; y \mapsto \frac{2y}{1+y^2}$$

gegeben ist.

d) Seien $x_1, x_2 \in [-1,1]$ mit $x_1 < x_2$. Zu zeigen ist $f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2)$. Dies ergibt sich aus

$$\begin{aligned}
f^{-1}(x_2) - f^{-1}(x_1) &= \frac{2x_2}{1+x_2^2} - \frac{2x_1}{1+x_1^2} = \frac{2x_2(1+x_1^2) - 2x_1(1+x_2^2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} = \frac{2(x_2 - x_1 + x_1^2x_2 - x_1x_2^2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} \\
&= \frac{2(x_2 - x_1 + x_1x_2(x_1 - x_2))}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} = \frac{2(x_2-x_1)(1-x_1x_2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} > 0,
\end{aligned}$$

denn wegen $-1 \leqslant x_1 < x_2 \leq 1$ ist $x_1x_2 < 1$.

e) Da f^{-1} die Umkehrfunktion von f ist, ist f die Umkehrfunktion von f^{-1}. Da f^{-1} streng monoton wachsend ist, ist es gemäß Vorlesung auch ihre Umkehrfunktion f.

Aufgabe 40 (Tutorium)

a) Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(a) > g(a)$ und $f(b) < g(b)$. Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in (a,b)$ existiert mit $f(x_0) = g(x_0)$.

b) Zeigen Sie, dass die Gleichung
$$\frac{1}{1+x^2} = \sqrt{x}$$
eine Lösung $x_0 \geqslant 0$ besitzt.

c) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) = f(1)$. Zeigen Sie, dass dann ein $x_1 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ existiert mit der Eigenschaft:
$$f(x_1) = f\left(\frac{1}{2} + x_1\right).$$

Lösungsvorschlag

a) Sei $h := g - f$. Dann ist $h(a) = g(a) - f(a) < 0$, $h(b) = g(b) - f(b) > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz (h ist als Komposition der stetigen Funktionen f und g stetig) existiert somit ein $x_0 \in (a,b)$ mit $h(x_0) = g(x_0) - f(x_0) = 0$.

b) Setze $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$, $g(x) := \sqrt{x}$. Beide Funktionen sind stetig auf ganz $\mathbb{R}$. Zudem gilt $f(0) = 1 > 0 = g(0)$, $f(1) = \frac{1}{2} < 1 = g(1)$. Nach Teil a) existiert also ein $x_0 \in (0,1)$ mit $f(x_0) = \frac{1}{1+x_0^2} = \sqrt{x_0} = g(x_0)$.

c) Setze $g(x) := f(x + \frac{1}{2})$. Dann ist g, wie f, stetig und es gilt
$$g(0) = f(1/2), \qquad g(1/2) = f(1) = f(0).$$
Gilt $f(0) = g(0) (= f(1/2))$, so ist die Behauptung gezeigt. Ansonsten ist entweder $f(0) < g(0)$ und somit $f(1/2) = g(0) > f(0) = g(1/2)$ oder umgekehrt. In beiden Fällen folgt die Behauptung aus **a)**.

Aufgabe 41 (Übung)

a) Zeigen Sie: Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a,b] \to [a,b]$ stetig, so existiert ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) = x_0$.

b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(0) = 1$ und $f(x+y) \leq f(x)f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie die Äquivalenz
$$f \text{ ist stetig.} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ ist stetig in } 0.$$

Lösungsvorschlag

a) Definiere $g : [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) - x$. Dann ist g stetig als Komposition von stetigen Funktionen. Wegen $f(a), f(b) \in [a,b]$ gilt insbesondere $f(a) \geq a$ und $f(b) \leq b$, also folgt
$$g(a) = f(a) - a \geq a - a = 0 \quad \text{und } g(b) = f(b) - b \leq b - b = 0.$$
Somit ist $g(a) \leq 0 \leq g(b)$, also besitzt g nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle, das heißt, man findet ein $x \in [a,b]$ mit $0 = g(x) = f(x) - x$, also $f(x) = x$.

b) *Voraussetzung:* Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(0) = 1$ und

$$f(x+y) \leq f(x)f(y) \tag{0.1}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
Behauptung: Es gilt

$$f \text{ ist stetig.} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ ist stetig in } 0.$$

Beweis: Wenn f stetig ist, so ist f insbesondere stetig in 0.
Sei nun umgekehrt f stetig in 0. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ mit $x_n \to x_0$ für $n \to \infty$. Setze $y_n := x_n - x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus Ungleichung (0.1) folgt

$$f(x_n) = f(y_n + x_0) \leq f(y_n)f(x_0)$$

und

$$f(x_0) = f(x_n + (-y_n)) \leq f(x_n)f(-y_n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $y_n \to 0$ (und damit auch $-y_n \to 0$) für $n \to \infty$ und $f(0) = 1$ folgt aus der Stetigkeit von f in 0, dass $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(-y_n) = f(0) = 1$ gilt. Somit ist $f(-y_n) > 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Daher erhalten wir aus den obigen beiden Abschätzungen die Ungleichung

$$\frac{f(x_0)}{f(-y_n)} \leq f(x_n) \leq f(y_n)f(x_0). \tag{0.2}$$

Außerdem gilt ferner

$$\frac{f(x_0)}{f(-y_n)} \to f(x_0) \quad \text{und} \quad f(y_n)f(x_0) \to f(x_0)$$

für $n \to \infty$. Aus Satz 8.6(4) folgt mit der Abschätzung (0.2) die Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Also ist f stetig in x_0. Wegen der Beliebigkeit von $x_0 \in \mathbb{R}$ ist daher f stetig.

Aufgabe 42 (Tutorium)

a) Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt, so existiert ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) = x_0$.

b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(x+y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie die Äquivalenz

$$f \text{ ist stetig.} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ ist stetig in } 0.$$

Lösungsvorschlag

a) Da f beschränkt ist, findet man ein $M > 0$ mit $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also $f(\mathbb{R}) \subseteq [-M, M]$.
Definiere $g := f|_{[-M,M]}$, dann ist g auch stetig, und es gilt

$$g([-M,M]) = f([-M,M]) \subseteq f(\mathbb{R}) \subseteq [-M,M].$$

Also ist $g : [-M,M] \to [-M,M]$ eine stetige Selbstabbildung des Intervalls $[-M,M]$. Nach Aufgabe 41 a) (mit $a := -M, b := -M$ und g anstelle von f) findet man ein $x_0 \in [-M,M]$ mit $x_0 = g(x_0) = f(x_0)$.

b) *Voraussetzung:* Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{0.3}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
Behauptung: Es gilt

$$f \text{ ist stetig.} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ ist stetig in } 0.$$

Beweis: Wenn f stetig ist, so ist f insbesondere stetig in 0.
Sei nun umgekehrt f stetig in 0. Aus der Identität (0.3) erhält man

$$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0).$$

Folglich ist $f(0) = 0$. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ mit $x_n \to x_0$ für $n \to \infty$. Setze $y_n := x_n - x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $y_n \to 0$ für $n \to \infty$. Wir bekommen damit und mit Gleichung (0.3), $f(0) = 0$ und der Stetigkeit von f in 0 das Resultat

$$f(x_n) = f(y_n + x_0) = f(y_n) + f(x_0) \to f(0) + f(x_0) = f(x_0)$$

für $n \to \infty$. Dies zeigt die Stetigkeit von f in $x_0 \in \mathbb{R}$. Da x_0 beliebig aus $\mathbb{R}$ gewählt war, ist somit f stetig.