Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

WS 2018/2019
13.12.2018

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

9. Übungsblatt

Aufgabe 49 (Übung)

a) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Funktion $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin(x^{-1}) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie, wo die Funktion f_α stetig, differenzierbar bzw. stetig differenzierbar ist und geben sie, falls existent, die Ableitung an.

b) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf Differenzierbarkeit und geben Sie wenn möglich die Ableitung an.

(i) $f(x) = |x|^3$,

(ii) $f(x) = \operatorname{Arsinh}(x)$.

Aufgabe 50 (Tutorium)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ auf Differenzierbarkeit und geben Sie wenn möglich die Ableitung an.

a) $D = \mathbb{R}$, $\quad f(x) = x^5 - 3x^2 + 2x + 17$,

b) $D = \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

c) $D = (1, \infty)$, $\quad f(x) = \log(\log(x))$,

d) $D = \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \cos(2x)\mathrm{e}^{\sin(x)}$,

e) $D = \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{\cosh(x)}}$,

f) $D = (0, \infty)$, $\quad f(x) = x^x$,

g) $D = (0, \infty)$, $\quad f(x) = x^{(x^x)}$,

h) $D = (0, \pi)$, $\quad f(x) = x^{\sin(x)} \sin(x)^x$,

i) $D = \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \tanh(x)$,

j) $D = \mathbb{R}$, $\quad f(x) = |\sin(x)|$.

Aufgabe 51 (Übung)

a) Für eine physikalische Größe werden bei $n \in \mathbb{N}$ Messungen die Messwerte $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ bestimmt. Als Messergebnis gibt man die Zahl $a \in \mathbb{R}$ an, die durch

$$\sum_{k=1}^{n} (a - a_k)^2 = \min\{\sum_{k=1}^{n} (x - a_k)^2 \,:\, x \in \mathbb{R}\}$$

definiert wird (*Methode der kleinsten Quadrate*). Berechnen Sie a.

b) Zeigen bzw. berechnen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes:

(i) $e^{x^2} - e^{y^2} \leq (x-y)(x+y)\,e^{x^2}$ für $x > y > 0$,

(ii) $\lim_{x\to\infty} \left(x \left(\log\left(1 + \sqrt{1+x^2}\right) - \log(x) \right) \right)$.

Aufgabe 52 (Tutorium)

a) Sei $f : [-3, 2] \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$ für alle $x \in [-3, 2]$ definiert. Begründen Sie, dass f sein Maximum und Minimum annimmt und berechnen Sie diese.

b) Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes:

(i) $x\log(x) - y\log(y) \le (x-y)(1+\log(x)) \quad \text{für} \quad x > y > 0,$

(ii) $|\log(\cos(x)) - \log(\cos(y))| \le \sqrt{3}\,|x-y| \quad \text{für} \quad x, y \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}].$

Aufgabe 53 (Übung)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\tan(x) + \frac{1}{x - \frac{\pi}{2}}\right),$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos(x^{-1})}{\sin(x)},$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{-x^2} - 1 + x\sin(x)}{\sqrt{1-x^2} + x^2 - 1}.$

Aufgabe 54 (Tutorium)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{\sin(\sin(x))}{x - \pi},$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \log(x)},$

c) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\tan(x).$

Modulprüfung

- Die **Modulprüfung** findet am **21.02.2019** von **8 bis 10 Uhr** statt.
- Die **Anmeldung zur Prüfung** ist ab sofort online unter `https://campus.studium.kit.edu/exams/registration.php` möglich
- **Anmeldeschluss** ist der **10.02.2019**.
- Eine Abmeldung von der Prüfung ist bis zum 20.02.2019 (ebenfalls online) bzw. bis kurz vor der Prüfung (vor Ort) möglich.
- Die **Hörsaalverteilung** wird am **13.02.2019** am schwarzen Brett neben Zimmer 2.027 im Allianzgebäude bekanntgegeben.
- Als Hilfsmittel zugelassen sind zwei beidseitig handbeschriebene DIN-A4-Blätter
- Die **Einsicht** findet am **25.04.2019** von **16 bis 18 Uhr** im **Messtechnik-Hörsaal** (Geb. 30.33) statt.