Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 9. Übungsblatt

Aufgabe 49 (Übung)

a) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Funktion $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin(x^{-1}) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie, wo die Funktion f_α stetig, differenzierbar bzw. stetig differenzierbar ist und geben sie, falls existent, die Ableitung an.

b) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf Differenzierbarkeit und geben Sie wenn möglich die Ableitung an.

(i) $f(x) = |x|^3$, (ii) $f(x) = \operatorname{Arsinh}(x)$.

Lösungsvorschlag

a) Wir stellen zunächst fest, dass f_α für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ auf der Menge $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig differenzierbar ist. Die Produkt- und Kettenregel liefert dort

$$f_\alpha'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sin(x^{-1}) + x^\alpha \cdot (-1) \cos(x^{-1}) x^{-2} = x^{\alpha-2}(\alpha x \sin(x^{-1}) - \cos(x^{-1})),$$

was als Komposition stetiger Funktionen wieder eine stetige Funktion ist. Es bleibt also noch das Verhalten von f_α in Null zu bestimmen. Wir unterscheiden nach den Werten von α.
<u>1. Fall:</u> $\alpha \leqslant 0$. f_α ist hier unstetig in 0, denn für $x_n = \frac{2}{\pi(2n+1)}$ gilt $\sin(x_n^{-1}) = (-1)^n$ und somit

$$f_\alpha(x_n) = \left(\frac{2}{\pi(2n+1)}\right)^\alpha (-1)^n,$$

was nicht gegen 0 konvergiert, solange $\alpha \leqslant 0$ gilt.
<u>2. Fall:</u> $0 < \alpha \leqslant 1$. Nun ist die Funktion in 0 stetig, aber nicht differenzierbar. Für $x \neq 0$ gilt

$$|f_\alpha(x) - f(0)| = |x|^\alpha |\sin(x^{-1})| \leqslant |x|^\alpha \to 0 \quad (x \to 0),$$

aber

$$\lim_{x \to 0} \frac{f_\alpha(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} x^{\alpha-1} \sin(x^{-1})$$

existiert nicht mit der gleichen Folge als Argument wie im 1. Fall.
<u>3. Fall:</u> $1 < \alpha \leqslant 2$. Nun ist die Funktion in 0 differenzierbar, aber nicht stetig differenzierbar. Es

gilt

$$f_\alpha'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f_\alpha(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x^{\alpha-1}\sin(x^{-1}) = 0$$

wie beim Beweis der Stetigkeit im 2. Fall. Mit der Folge $x_n = \frac{1}{n\pi}$ sehen wir jedoch, dass $\sin(x_n^{-1}) = 0$ und $\cos(x_n^{-1}) = (-1)^n$ und somit

$$f_\alpha'(x_n) = \left(\frac{1}{n\pi}\right)^{\alpha-2}(-1)^n,$$

was wiederum nicht (und damit insbesondere nicht gegen Null) konvergiert, womit f_α' nicht stetig in 0 ist.
<u>4. Fall:</u> $\alpha > 2$. Hier ist f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar, da f_α' stetig in der Null ist. Mit derselben Rechnung wie im 3. Fall ist f_α in Null differenzierbar mit $f_\alpha'(0) = 0$ und für $x \neq 0$ mit $|x| \leqslant 1$ gilt

$$|f_\alpha'(x) - f_\alpha'(0)| \leqslant |x|^{\alpha-2}(\alpha\,|x|\,|\sin(x^{-1})| + |\cos(x^{-1})|) \leqslant |x|^{\alpha-2}(\alpha+1) \to 0 \quad (x\to 0),$$

womit f_α' in 0 stetig ist.

b) (i) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{für } x \geq 0, \\ -x^3 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Nach Beispiel (4) nach Satz 10.4 ist f auf $(0,\infty)$ differenzierbar mit $f'(x) = 3x^2$, $x > 0$. Ebenso ist f auf $(-\infty, 0)$ differenzierbar mit $f'(x) = -3x^2$, $x < 0$. Wegen

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^3}{x} = \lim_{x\to 0+} x^2 = 0$$

und

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0-} \frac{-x^3}{x} = \lim_{x\to 0-} -x^2 = 0$$

gilt $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$, d.h. f ist in 0 differenzierbar mit $f'(0) = 0$. Somit ist f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{für } x \geq 0, \\ -3x^2 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

(ii) Wie in **Aufgabe 47 b)** gesehen, gilt

$$\operatorname{Arsinh}(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \qquad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}.$$

Damit ist Arsinh als Komposition differenzierbarer Funktionen auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$\operatorname{Arsinh}'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Alternativ kann man Arsinh' auch mit Hilfe des Satzes über die Ableitung der Umkehrfunktion berechnen: Wegen $\sinh'(x) = \cosh(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\operatorname{Arsinh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\operatorname{Arsinh}'(x) = \frac{1}{\sinh'(\operatorname{Arsinh}(x))} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{Arsinh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(\operatorname{Arsinh}(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

wobei wir $\cosh^2(y) - \sinh^2(y) = 1$ sowie $\cosh(y) > 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$ verwendetet haben.

Aufgabe 50 (Tutorium)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ auf Differenzierbarkeit und geben Sie wenn möglich die Ableitung an.

a) $D = \mathbb{R}, \quad f(x) = x^5 - 3x^2 + 2x + 17,$

b) $D = \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

c) $D = (1, \infty), \quad f(x) = \log(\log(x)),$

d) $D = \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos(2x)e^{\sin(x)},$

e) $D = \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{\cosh(x)}},$

f) $D = (0, \infty), \quad f(x) = x^x,$

g) $D = (0, \infty), \quad f(x) = x^{(x^x)},$

h) $D = (0, \pi), \quad f(x) = x^{\sin(x)} \sin(x)^x,$

i) $D = \mathbb{R}, \quad f(x) = \tanh(x),$

j) $D = \mathbb{R}, \quad f(x) = |\sin(x)|.$

Lösungsvorschlag

Alle Funktionen bis auf diejenige in Teil **j)** sind als Koposition differenzierbarer Funktionen (ohne Nullstellen im Nenner) auf ihrem kompletten Definitionsbereich differenzierbar.

a) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $f'(x) = 5x^4 - 6x + 2$ (siehe Beispiel (4) nach Satz 10.4)

b) Nach der Quotientenregel gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$, dass

$$f'(x) = \frac{0 - 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}.$$

c) Nach der Vorlesung ist log differenzierbar und es gilt $\log'(x) = \frac{1}{x}$ für alle $x > 0$. Es folgt mit der Kettenregel, dass

$$f'(x) = [\log \circ \log]'(x) = (\log' \circ \log)(x) \cdot \log'(x) = \frac{1}{\log(x)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \log(x)} \qquad \forall x > 1$$

d) Mit der Kettenregel gilt $[\exp \circ \sin]' = (\exp' \circ \sin) \cdot \sin' = (\exp \circ \sin) \cdot \cos$. Sei ferner $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = 2x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Es folgt wieder mit der Kettenregel $(\cos \circ g)' = (\cos' \circ g) \cdot g' = -2(\sin \circ g)$. Mit der Produktregel folgt

$$\begin{aligned} f'(x) &= [(\cos \circ g) \cdot (\exp \circ \sin)]'(x) \\ &= (\cos \circ g)'(x) \cdot (\exp \circ \sin)(x) + (\cos \circ g)(x) \cdot (\exp \circ \sin)'(x) \\ &= -2\sin(2x)e^{\sin(x)} + \cos(2x)\cos(x)e^{\sin(x)} \\ &= (\cos(2x)\cos(x) - 2\sin(2x))\, e^{\sin(x)} \end{aligned}$$

e) Aus der Vorlesung ist bekannt (Beispiel (7) vor Satz 10.1), dass cosh differenzierbar ist und $\cosh' = \sinh$ gilt. Ebenfalls laut Vorlesung (Beispiel (4) nach Satz 10.4) ist die Abbildung $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$ differenzierbar und es gilt $g'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$ für alle $x > 0$. Es folgt mit der Kettenregel, dass

$$f'(x) = (g \circ \cosh)'(x) = (g' \circ \cosh)(x) \cdot \cosh'(x) = \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{(\cosh(x))^{\frac{3}{2}}}\right) \cdot \sinh(x) = -\frac{\sinh(x)}{2(\cosh(x))^{\frac{3}{2}}}$$

f) Es gilt $f(x) = x^x = e^{x \log x}$. Sei $g(x) := x\log(x)$. Mit der Ketten- und Produktregel folgt dann für jedes $x > 0$

$$f'(x) = e^{g(x)}g'(x) = x^x(1 \cdot \log x + x \cdot x^{-1}) = (1 + \log x)x^x.$$

g) Setzt man $g(x) := x^x = e^{x\log x}$ und $h(x) := g(x)\log(x)$, so ist $f(x) = x^{g(x)} = e^{g(x)\log x} = e^{h(x)}$ für jedes $x > 0$. Mit **f)** sowie der Ketten- und Produktregel folgt für $x > 0$, dass

$$f'(x) = e^{h(x)}h'(x) = x^{(x^x)}\left(g'(x)\log x + g(x)x^{-1}\right) = x^{(x^x)}\left((1 + \log x)x^x \log x + x^{x-1}\right).$$

h) Sei $g : (0,\pi) \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = x^{\sin(x)} = e^{\log(x)\sin(x)}$ und $h : (0,\pi) \to \mathbb{R}$ durch $h(x) = \sin(x)^x = e^{\log(\sin(x))x}$. Mit der Ketten- und Produktregeln folgt

$$\begin{aligned} g'(x) &= (\exp\circ(\log\cdot\sin))'(x) = (\exp'\circ(\log\cdot\sin))(x)\cdot(\log\cdot\sin)'(x) \\ &= (\exp\circ(\log\cdot\sin))(x)\cdot(\log'\cdot\sin+\log\cdot\sin')(x) \\ &= x^{\sin(x)}\cdot\left(\frac{\sin(x)}{x} + \log(x)\cos(x)\right) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} h'(x) &= (\exp\circ(\log\circ\sin\cdot\mathrm{id}))'(x) = (\exp'\circ(\log\circ\sin\cdot\mathrm{id}))(x)\cdot(\log\circ\sin\cdot\mathrm{id})'(x) \\ &= (\exp\circ(\log\circ\sin\cdot\mathrm{id}))(x)\cdot((\log\circ\sin)'\cdot\mathrm{id}+(\log\circ\sin)\cdot\mathrm{id}')(x) \\ &= (\exp\circ(\log\circ\sin\cdot\mathrm{id}))(x)\cdot((\log'\circ\sin\cdot\sin')\cdot\mathrm{id}+(\log\circ\sin))(x) \\ &= \sin(x)^x\left(\frac{x\cos(x)}{\sin(x)} + \log(\sin(x))\right). \end{aligned}$$

Mit der Produktregel ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} f'(x) &= [g\cdot h]'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) \\ &= x^{\sin(x)}\sin(x)^x\left(\frac{\sin(x)}{x} + \log(x)\cos(x) + \frac{x\cos(x)}{\sin(x)} + \log(\sin(x))\right) \end{aligned}$$

i) Es gilt $f(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$. Mit $\sinh' = \cosh$ und $\cosh' = \sinh$ folgt anhand der Quotientenregel

$$f'(x) = \frac{\cosh(x)\cosh(x) - \sinh(x)\sinh(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{1}{\cosh^2(x)},$$

wobei wir zusätzlich $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ verwendet haben.

j) Die Funktion f lässt sich offenbar auch als

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \\ \sin x & \text{falls } x \in (k\pi, (k+1)\pi) \text{ mit } k \in \mathbb{Z}, k \text{ gerade} \\ -\sin x & \text{falls } x \in (k\pi, (k+1)\pi) \text{ mit } k \in \mathbb{Z}, k \text{ ungerade} \end{cases}$$

schreiben.

Weil sin auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, ist f auf $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ differenzierbar und es gilt dort

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & \text{falls } x \in (k\pi, (k+1)\pi) \text{ mit } k \in \mathbb{Z}, k \text{ gerade} \\ -\cos x & \text{falls } x \in (k\pi, (k+1)\pi) \text{ mit } k \in \mathbb{Z}, k \text{ ungerade} \end{cases}.$$

In den Punkten $\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ ist f nicht differenzierbar: Wir untersuchen zunächst die Stellen $x_0 = k\pi$ mit geradem $k \in \mathbb{Z}$ und zeigen, dass der Grenzwert $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ nicht existiert. Es gilt nämlich

$$\lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0+} \frac{\sin x - \sin x_0}{x-x_0} = \sin'(x_0) = \cos(x_0) = 1$$

und

$$\lim_{x\to x_0-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0-} \frac{-\sin x - (-\sin x_0)}{x-x_0} = (-\sin)'(x_0) = -\cos(x_0) = -1.$$

Also ist f in diesen Punkten nicht differenzierbar. An den Stellen $k\pi$ mit ungeradem $k \in \mathbb{Z}$ kann man analog zeigen, dass die einseitigen Grenzwerte des Differenzenquotienten gegen -1 und 1 konvergieren, weswegen f dann auch in diesen Punkten nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 51 (Übung)

a) Für eine physikalische Größe werden bei $n \in \mathbb{N}$ Messungen die Messwerte $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ bestimmt. Als Messergebnis gibt man die Zahl $a \in \mathbb{R}$ an, die durch

$$\sum_{k=1}^{n} (a - a_k)^2 = \min\{\sum_{k=1}^{n} (x - a_k)^2 : x \in \mathbb{R}\}$$

definiert wird (*Methode der kleinsten Quadrate*). Berechnen Sie a.

b) Zeigen bzw. berechnen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes:

(i) $e^{x^2} - e^{y^2} \le (x-y)(x+y)e^{x^2}$ für $x > y > 0$,

(ii) $\lim_{x\to\infty} \left(x\left(\log\left(1+\sqrt{1+x^2}\right) - \log(x)\right)\right)$.

Lösungsvorschlag

a) Definiere hilfsweise die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$g(x) := \sum_{k=1}^{n} (x - a_k)^2$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Klar: g ist differenzierbar und es gilt

$$g'(x) = \sum_{k=1}^{n} 2(x - a_k) = 2\left(\sum_{k=1}^{n} x - \sum_{m=1}^{n} a_m\right) = 2nx - 2\sum_{k=1}^{n} a_k = 2n\left(x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist

$$g'(x) \begin{cases} > 0 & \text{für } x > \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \\ = 0 & \text{für } x = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \\ < 0 & \text{für } x < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \end{cases}.$$

Nach Abschnitt 10.7 der Vorlesung ist g auf $(-\infty, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k]$ monoton fallend und auf $[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k, \infty)$ monoton wachsend. Das bedeutet: Ist $x \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$, so ist $g(x) \geq g(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k)$; ist $x \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$, so ist $g(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k) \leq g(x)$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt also $g(x) \geq g(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k)$.

Angenommen, es gäbe ein $b \in \mathbb{R}$ mit $b \neq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$ und $g(b) = g(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k)$. O.B.d.A. ist $b > \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$. Nach dem Mittelwertsatz aus Abschnitt 10.6 der Vorlesung, existiert ein $\xi \in (\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k, b)$ mit $g'(\xi) = 0$. Nach obiger Rechnung ist aber $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$ die einzige Nullstelle von g'.

Also muss die Annahme verworfen werden und $a = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$ ist die gesuchte eindeutige Stelle des globalen Minimums von g.

b) (i) Seien $0 < y < x$. Betrachte die Funktion $f\colon [y^2, x^2] \to \mathbb{R}$, $u \mapsto e^u$. Da f auf $[y^2, x^2]$ stetig und auf (y^2, x^2) differenzierbar ist, erfüllt f die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes. Danach existiert ein $\xi \in (y^2, x^2)$ mit

$$e^{x^2} - e^{y^2} = f(x^2) - f(y^2) = (x^2 - y^2) f'(\xi) = \underbrace{(x-y)(x+y)}_{\geq 0} e^{\xi} \leq (x-y)(x+y)e^{x^2}$$

wegen der Monotonie der (reellen) Exponentialfunktion.

(ii) Sei $x \geq 1$. Dann ist log auf $[x, 1 + \sqrt{1+x^2}]$ stetig und auf $(x, 1 + \sqrt{1+x^2})$ differenzierbar. Nach dem Mittelwertsatz existiert dann ein $\xi_x \in (x, 1 + \sqrt{1+x^2})$ mit:

$$\begin{aligned} x\left(\log\left(1 + \sqrt{1+x^2}\right) - \log(x)\right) &= \frac{x}{\xi_x}\left(1 + \sqrt{1+x^2} - x\right) = \frac{x}{\xi_x}\left(1 + \sqrt{1+x^2} - \sqrt{x^2}\right) \\ &= \frac{x}{\xi_x}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{x^2}}\right) \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}}} = \frac{x}{1 + \sqrt{1+x^2}} \leq \frac{x}{\xi_x} \leq \frac{x}{x} = 1 \quad \text{wegen} \quad x < \xi_x < 1 + \sqrt{1+x^2}$$

und damit ist $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\xi_x} = 1$ nach Satz 8.6 (4). Deshalb ist

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x\Big(\log\Big(1+\sqrt{1+x^2}\Big)-\log(x)\Big) &= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\xi_x}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{x^2}}\right) \\
&= \left(\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\xi_x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{x^2}}\right)\right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Aufgabe 52 (Tutorium)

a) Sei $f : [-3,2] \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$ für alle $x \in [-3,2]$ definiert. Begründen Sie, dass f sein Maximum und Minimum annimmt und berechnen Sie diese.

b) Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes:

(i) $x\log(x) - y\log(y) \leq (x-y)(1+\log(x))$ für $x > y > 0$,

(ii) $|\log(\cos(x)) - \log(\cos(y))| \leq \sqrt{3}\,|x-y|$ für $x, y \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$.

Lösungsvorschlag

a) Die Funktion f ist stetig. Das Intervall $I := [-3,2]$ ist beschränkt und abgeschlossen. Nach Satz 8.15 der Vorlesung nimmt f auf I Maximum und Minimum an. Seien etwa $x_m, x_M \in I$ mit

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \qquad \forall x \in I.$$

Nach Satz 10.5 sind x_m bzw. x_M entweder Randpunkte von I oder innere Punkte (also Elemente aus $J := (-3,2)$) mit $f'(x) = 0$ (da f auf J differenzierbar ist). Es gilt

$$f'(x) = 4x^3 - 8x \quad \forall x \in J.$$

für $x \in J$. Damit folgt

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 4x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 2 \Leftrightarrow x \in \{0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$$

Es gilt ferner

$$\begin{aligned}
f(-3) &= (-3)^4 - 4\cdot(-3)^2 + 2 = 81 - 4\cdot 9 + 2 = 47, \\
f\big(-\sqrt{2}\big) &= f\big(\sqrt{2}\big) = \big(\sqrt{2}\big)^4 - 4\cdot\big(\sqrt{2}\big)^2 + 2 = 4 - 4\cdot 2 + 2 = -2, \\
f(0) &= 2, \\
f(2) &= 2^4 - 4\cdot 2^2 + 2 = 2.
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$x_m \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\},\ f(x_m) = -2 = \min\{f(x) : x \in I\} \qquad x_M = -3,\ f(x_M) = 47 = \max\{f(x) : x \in I\}$$

b) (i) Seien $0 < y < x$. Definiere $f\colon [y,x] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t\log(t)$. Dann ist f auf $[y,x]$ stetig und auf (y,x) differenzierbar mit $f'(t) = 1\cdot\log(t) + t\cdot\frac{1}{t} = 1 + \log(t)$, $t \in (y,x)$. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\xi \in (y,x)$ mit

$$x\log(x) - y\log(y) = (x-y)f'(\xi) = (x-y)(1+\log(\xi)) \leq (x-y)(1+\log(x)),$$

weil $\log\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist.

(ii) Wir betrachten die Funktion $f\colon [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}] \to \mathbb{R},\ t \mapsto \log(\cos(t))$. Diese ist auf $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ stetig differenzierbar mit $f'(t) = \frac{-\sin(t)}{\cos(t)} = -\tan(t)$. Da tan auf $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ streng monoton wachsend ist und $\tan(-\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$ sowie $\tan(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$ gelten, ergibt sich

$$|f'(t)| \leq \sqrt{3} \qquad \text{für alle } t \in [-\tfrac{\pi}{3}, \tfrac{\pi}{3}].$$

Sind $x, y \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$, so finden wir nach dem Mittelwertsatz ein ξ zwischen x und y mit

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x-y).$$

Es folgt

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)|\,|x-y| \leq \sqrt{3}\,|x-y|.$$

Aufgabe 53 (Übung)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\tan(x) + \frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\right)$,

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos(x^{-1})}{\sin(x)}$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2} - 1 + x\sin(x)}{\sqrt{1-x^2} + x^2 - 1}$.

Lösungsvorschlag

a) Für $x \in [0,\pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$ ist

$$\tan(x) + \frac{1}{x-\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{1}{x-\frac{\pi}{2}} = \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin(x) + \cos(x)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos(x)} =: \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Es gilt

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = 0 = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} g(x).$$

Zudem ist $g'(x) = \cos(x) - \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin(x)$ außer in $\frac{\pi}{2}$ nur dann Null, wenn $\tan(x) = \frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}$. Da der Tangens auf $(0, \frac{\pi}{2}$ und $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ streng monoton wachsend und $\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}$ streng monoton fallend ist, kann dies in beiden Intervallen jeweils nur ein Mal der Fall sein, wodurch eine Umgebung um $\frac{\pi}{2}$ gefunden werden kann, in der $g'(x)$ (außer in $\frac{\pi}{2}$) nicht Null ist. Mit der Regel von de l'Hospital folgt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x) + \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos(x) - \sin(x)}{\cos(x) - \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin x} \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos(x)}{\cos(x) - \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin(x)} =: \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{F(x)}{G(x)}.
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} F(x) = 0 = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} G(x).$$

Nochmalige Anwendung der Regel von de l'Hospital liefert (das Argument dafür, dass $G'(x) \neq 0$ in einer Umgebung von $\frac{\pi}{2}$ funktioniert analog zur Argumentation bei g')

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x) - \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\sin(x)}{-\sin(x) - \sin(x) - \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\cos(x)} = \frac{0}{-2} = 0.$$

Insgesamt haben wir also

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\tan(x) + \frac{1}{x - \frac{\pi}{2}}\right) = 0.$$

Die Begründung, warum wir L'Hospital anwenden dürfen, erfolgt dabei rückwärts: Da $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{F'(x)}{G'(x)} = 0$ ist, existiert auch $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{F(x)}{G(x)} = 0$, weshalb auch $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ existiert.

b) Wir versuchen, ob wir die Regel von de l'Hospital anwenden können. Hier konvergieren Zähler $f(x) = x^2\cos(x^{-1})$ und Nenner $g(x) = \sin(x)$ gegen 0, aber

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos(x^{-1}) + x^2\sin(x^{-1})\frac{1}{x^2}}{\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos(x^{-1}) + \sin(x^{-1})}{\cos(x)}$$

existiert nicht, denn für $x_n := ((n + \frac{1}{2})\pi)^{-1}$ hat der Bruch den Wert $\frac{(-1)^n}{\cos(x_n)}$. Die Regel von de l'Hospital ist demnach nicht anwendbar. Der Grenzwert existiert jedoch, denn

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos(x^{-1})}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(x)} \cdot x\cos(x^{-1}) = 1 \cdot 0 = 0.$$

c) Zähler und Nenner sind differenzierbar in $(-1, 1)$ und nehmen in 0 den Wert Null an. Die Regel von de l'Hospital liefert (mit $f(x) := \mathrm{e}^{-x^2} - 1 + x\sin(x)$ und $g(x) := \sqrt{1 - x^2} + x^2 - 1$)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{-x^2} - 1 + x\sin(x)}{\sqrt{1 - x^2} + x^2 - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x\mathrm{e}^{-x^2} + \sin(x) + x\cos(x)}{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + 2x}.$$

Diesen Grenzwert bestimmen wir durch ein weiteres Anwenden der Regel von de l'Hospital, denn Zähler und Nenner sind wieder differenzierbar auf $(-1, 1)$ und nehmen in 0 den Wert Null an. Es folgt

$$\lim_{x\to 0} \frac{-2x\mathrm{e}^{-x^2} + \sin(x) + x\cos(x)}{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\mathrm{e}^{-x^2} + 4x^2\mathrm{e}^{-x^2} + 2\cos(x) - x\sin(x)}{-\frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} + 2} = \frac{0}{1} = 0$$

Aufgabe 54 (Tutorium)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin(\sin(x))}{x-\pi}$,

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x - x}{1-x+\log(x)}$,

c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\tan(x)$.

Lösungsvorschlag

a) Die Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_1(x) = \sin(\sin(x)) \qquad \text{und} \qquad f_2(x) = x - \pi$$

sind differenzierbar und es gilt $\lim_{x\to\pi} f_1(x) = \lim_{x\to 1} f_2(x) = 0$. Ferner ist $f_1'(x) = \cos(\sin(x))\cos(x)$ und $f_2'(x) = 1 \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Folglich gilt nach der Regel von l'Hospital

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin(\sin(x))}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x\to\pi} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = \lim_{x\to\pi} \frac{\cos(\sin(x))\cos(x)}{1} = -1$$

b) Wir wenden zwei Mal hintereinander die Regel von de l'Hospital an (Zähler und Nenner nehmen in beiden Fällen den Wert 0 an). Wegen $(x^x)' = x^x(1+\ln x)$ (siehe **Aufgabe 50**) ergibt sich

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1-x+\log(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^x(1+\log(x)) - 1}{-1+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{x^x(1+\log(x))^2 + x^x\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1+1}{-1} = -2.$$

c)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin(x)}{\cos(x)} =: \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Es gilt

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = 0 = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} g(x).$$

Mit der Regel von de l'Hospital folgt

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x) + \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos(x)}{-\sin(x)} = -1.$$