Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

WS 2018/2019
20.12.2018

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

10. Übungsblatt

Aufgabe 55 (Übung)

Ein Lichtstrahl durchlaufe eine Medium M_1 mit Lichtgeschwindigkeit c_1, treffe unter dem Winkel α_1 auf die ebene Grenzschicht zum Medium M_2 mit Lichtgeschwindigkeit c_2 und trete unter dem Winkel α_2 in dieses Medium ein. Es gelte das *Fermatsche Prinzip: Das Licht nimmt den Weg, der die kürzeste Zeit erfordert.* Leiten Sie daraus das Brechungsgesetz von Snellius her:

$$\frac{\cos(\alpha_1)}{c_1} = \frac{\cos(\alpha_2)}{c_2}.$$

Aufgabe 56 (Tutorium)

Die Funktion $f : (-1,\infty) \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x) = e^{-x} + \frac{1}{1+x}$ für alle $x \in (-1,\infty)$ definiert. Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_2(f, 1/2)$ und geben Sie eine Konstante $C > 0$ an, für die

$$|f(x) - T_2(f, 1/2)(x)| \le C\,|x - 1/2|^3$$

für alle $x \in [0,1]$ gilt.

Aufgabe 57 (Übung)

Finden Sie ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in I$ und eine differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ mit

$$f'(x) + xf(x) = 0, \qquad f(0) = 1,$$

indem Sie annehmen, dass f sich auf I durch eine Potenzreihe darstellen lässt.

Aufgabe 58 (Tutorium)

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x) = x^2 + 2x - 3$ für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. Bestimmen Sie eine Potenzreihe, die in einer Umgebung von $x_0 = -1$ die Funktion $\frac{1}{f}$ darstellt.

Aufgabe 59 (Übung)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$$

anhand der Definition (vgl. Beispiel (3) nach Lemma 11.1).

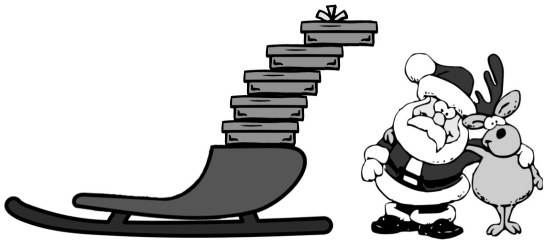
Aufgabe 60 (Tutorium)

Finden Sie eine alternative Lösung von **Aufgabe 26** (in $\mathbb{R}$) mit Hilfe der Differentiation von Potenzreihen: Bestimmen Sie für $x \in (-1,1)$ den Wert der Reihen

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$, **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n$.

Der Weihnachtsmann braucht Ihre Hilfe!

Der Weihnachtsmann hat fünf Geschenkpakete auf seinen Schlitten gestapelt. Nach rasanter Fahrt haben sich die Pakete wie im nebenstehenden Bild nach hinten verschoben und sind beinahe vom Schlitten gekippt. Es scheint, als ob sich das oberste Geschenk sogar nicht einmal mehr über der Ladefläche befindet. Der Weihnachtsmann fragt sich, ob das tatsächlich zutreffen kann. Außerdem grübelt er, wie weit er wohl 'nach hinten bauen' könnte, wenn er beliebig viele Geschenke zur Verfügung hätte. Können Sie dem Weihnachtsmann weiterhelfen?



Hinweis: Wir nehmen natürlich an, dass alle Pakete gleichartige, homogene, gleich ausgerichtete Quader sind und sich nur in Längsrichtung verschieben. Überlegen Sie sich, wie weit das oberste Paket über das zweitoberste hinausragen darf, wie weit die beiden obersten Pakete über das drittoberste hinausragen dürfen, und so weiter. Zeigen Sie anschließend induktiv, wie weit man mit einer festen, aber beliebigen Anzahl an Paketen maximal kommt.

Wir wünschen erholsame Weihnachtsfeiertage und einen guten Rutsch ins neue Jahr 2019!

Quelle: http://static.nichtlustig.de/toondb/051217.html
Urheber: Joscha Sauer