Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 10. Übungsblatt

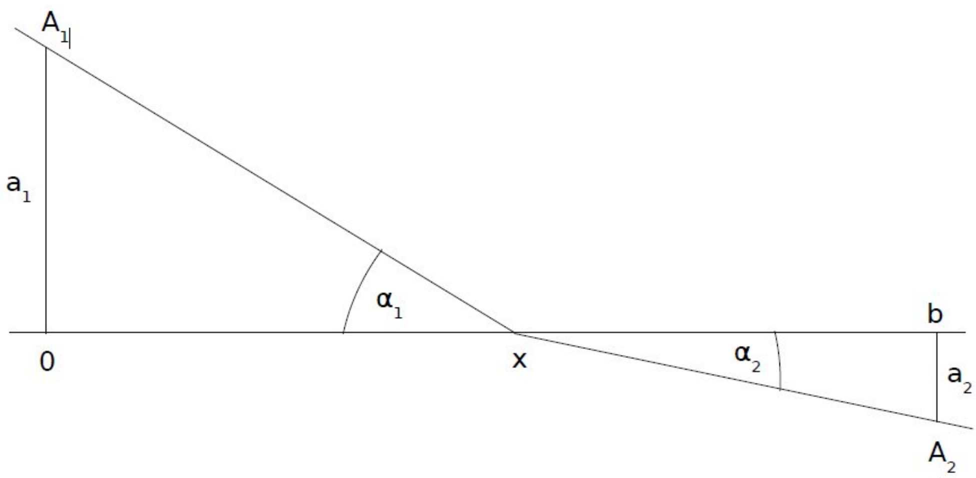
Aufgabe 55 (Übung)

Ein Lichtstrahl durchlaufe eine Medium M_1 mit Lichtgeschwindigkeit c_1, treffe unter dem Winkel α_1 auf die ebene Grenzschicht zum Medium M_2 mit Lichtgeschwindigkeit c_2 und trete unter dem Winkel α_2 in dieses Medium ein. Es gelte das *Fermatsche Prinzip: Das Licht nimmt den Weg, der die kürzeste Zeit erfordert.* Leiten Sie daraus das Brechungsgesetz von Snellius her:

$$\frac{\cos(\alpha_1)}{c_1} = \frac{\cos(\alpha_2)}{c_2}.$$

Lösungsvorschlag

Wir fügen gedanklich zwei zur Grenzschicht senkrecht stehende Geraden ein.



Dabei muss x nicht zwangsläufig zwischen den beiden Geraden liegen, damit die folgenden Rechnungen funktionieren. Zudem soll der Lichtstrahl natürlich tatsächlich auf die Grenzschicht treffen, wodurch $a_1, a_2 \neq 0$ gilt. Wir haben nun also einen Anfangspunkt A_1 und einen Endpunkt A_2, zwischen denen das Licht laut dem Fermatschen Prinzip den Weg "wählt", der die kürzeste Zeit erfordert. Diese Zeit ist, in Abhängigkeit von $x \in \mathbb{R}$, gegeben durch die Funktion

$$f(x) = \frac{\sqrt{a_1^2 + x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{a_2^2 + (b-x)^2}}{c_2}.$$

Diese Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist zwei Mal differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = \frac{x}{c_1\sqrt{a_1^2 + x^2}} - \frac{b-x}{c_2\sqrt{a_2^2 + (b-x)^2}}$$

sowie

$$f''(x) = \frac{\sqrt{a_1^2+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a_1^2+x^2}}}{c_1(a_1^2+x^2)} - \frac{-\sqrt{a_2^2+(b-x)^2} + \frac{(b-x)^2}{\sqrt{a_2^2+(b-x)^2}}}{c_2(a_2^2+(b-x)^2)} = \frac{a_1^2}{c_1(a_1^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{a_2^2}{c_2(a_2^2+(b-x)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Wegen $f''(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist f' streng monoton wachsend und hat somit wegen $f'(0) < 0 < f'(b)$ genau eine Nullstelle $x_0 \in (0,b)$ (Zwischenwertsatz). Somit hat f in x_0 ein lokales Extremum, das wegen $f''(x_0) > 0$ ein Minimum ist. Da offensichtlich $f(x) \to \infty$ für $x \to \pm\infty$, ist dieses Minimum auch global: Nach dem Zwischenwertsatz gibt es gewisse $x_1 < x_0 < x_2$ mit $f(x_1) = f(x_2) = 2f(x_0)$, sodass gleichzeitig $f(x) \geqslant 2f(x_0)$ für $x < x_1$ und $x > x_2$. Also liegt außerhalb von $[x_1, x_2]$ kein globales Minimum vor und in $[x_1, x_2]$ kommen nur die Randpunkte x_1 und x_2 sowie die Nullstelle x_0 von f' als Minimum in Frage, was die Behauptung liefert.
Wegen $f'(x_0) = 0$ folgt

$$\frac{\cos(\alpha_1)}{c_1} = \frac{x_0}{c_1\sqrt{a_1^2+x_0^2}} = \frac{b-x_0}{c_2\sqrt{a_2^2+(b-x_0)^2}} = \frac{\cos(\alpha_2)}{c_2}.$$

Aufgabe 56 (Tutorium)

Die Funktion $f : (-1,\infty) \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x) = e^{-x} + \frac{1}{1+x}$ für alle $x \in (-1,\infty)$ definiert. Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_2(f, 1/2)$ und geben Sie eine Konstante $C > 0$ an, für die

$$|f(x) - T_2(f, 1/2)(x)| \leq C\,|x - 1/2|^3$$

für alle $x \in [0,1]$ gilt.

Lösungsvorschlag

Die Funktion f ist beliebig oft differenzierbar. Wir berechnen die ersten drei Ableitungen. Für alle $x \in (-1,\infty)$ gilt:

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{-x} + \frac{1}{1+x} \\
f^{(1)}(x) &= -e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^2} \\
f^{(2)}(x) &= e^{-x} + \frac{2}{(1+x)^3} \\
f^{(3)}(x) &= -e^{-x} - \frac{6}{(1+x)^4}
\end{aligned}$$

Das Taylor-Polynom $T_2(f, 1/2)$ ist nach der Definition vor Satz 10.11 durch

$$\begin{aligned}
T_2(f, 1/2)(x) &= \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}\left(\frac{1}{2}\right)}{k!}\left(x - \frac{1}{2}\right)^k \\
&= \left(e^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{1+\frac{1}{2}}\right) - \left(e^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{e}} + \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{e}} + \frac{4}{9}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{e}} + \frac{16}{27}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

für alle $x \in (-1, \infty)$ gegeben.
Sei nun $x \in [0,1]$. Nach dem Satz von Taylor gibt es ein ξ zwischen x und $\frac{1}{2}$ derart, dass

$$f(x) - T_2(f, 1/2)(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 = -\left(\frac{1}{6\sqrt{e}} + \frac{1}{(1+\xi)^4}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)^3$$

gilt. Wegen $0 < \xi$ und damit

$$|f^{(3)}(\xi)| = |-e^{-\xi} - \frac{6}{(1+\xi)^4}| = e^{-\xi} + \frac{6}{(1+\xi)^4} \overset{\text{Monotonie}}{\leq} e^{-0} + \frac{6}{(1+0)^4} = 7$$

folgt mit $C := \frac{7}{6}$ wie gefordert

$$|f(x) - T_2(f, 1/2)(x)| \leq C|x - \frac{1}{2}|^3$$

für alle $x \in [0,1]$.

Aufgabe 57 (Übung)

Finden Sie ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in I$ und eine differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ mit

$$f'(x) + xf(x) = 0, \qquad f(0) = 1,$$

indem Sie annehmen, dass f sich auf I durch eine Potenzreihe darstellen lässt.

Lösungsvorschlag

Wir nehmen an, dass

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{für } x \in I = (-R, R),$$

wobei $I = \mathbb{R}$ für $R = \infty$. Nun wissen wir bereits, dass $1 = f(0) = a_0$ gelten muss. Außerdem gilt nach Satz 10.12, dass

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Soll f nun die gegebene Gleichung erfüllen, so muss gelten, dass

$$\begin{aligned} 0 = f'(x) + xf(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n \\ &= a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}((n+1)a_{n+1} + a_{n-1})x^n \end{aligned}$$

für jedes $x \in I$. Nach Satz 10.14 liefert das per Koeffizientenvergleich, dass

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{a_{n-1}}{n+1} \quad \text{für } n \geqslant 1.$$

Für ungerade $n = 2k+1$ folgt somit $a_{2k+1} = 0$, für gerade $n = 2k$ folgt

$$a_{2k} = \frac{a_{2(k-1)}}{2k} = \frac{a_{2(k-2)}}{2^2 k(k-1)} = \cdots = \frac{a_0}{2^k k!} = \frac{1}{2^k k!}.$$

Somit ergibt sich

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2^k k!} = e^{\frac{x^2}{2}},$$

womit $I = \mathbb{R}$ ebenfalls klar ist.

Aufgabe 58 (Tutorium)

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x) = x^2 + 2x - 3$ für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. Bestimmen Sie eine Potenzreihe, die in einer Umgebung von $x_0 = -1$ die Funktion $\frac{1}{f}$ darstellt.

Lösungsvorschlag

Gesucht ist eine Potenzreihe $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n$ mit Konvergenzradius $\rho > 0$ und

$$\frac{1}{x^2 + 2x - 3} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n \qquad \forall x \in \mathbb{R} : |x+1| < \rho.$$

Multiplizieren mit dem Nenner der linken Seite liefert die äquivalente Aussage:

$$\begin{aligned}
1 &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n\right)\left(x^2 + 2x - 3\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n\right)\left((x+1)^2 - 1 - 3\right) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n\right)\left((x+1)^2 - 4\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^{n+2}\right) - 4\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n\right) \\
&\overset{\text{Index-Shift}}{=} \left(\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} (x+1)^n\right) - 4\left(a_0 + a_1(x+1) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (x+1)^n\right) \\
&= -4a_0 - 4a_1(x+1) + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-2} - 4a_n)(x+1)^n \qquad \forall x \in \mathbb{R} : |x+1| < \rho
\end{aligned}$$

Sowohl die linke als die rechte Seite dieser Gleichung ist ein Funktionswert einer durch eine Potenzreihe definierten Funktion. Beide Reihen haben mindestens den Konvergenzradius $\rho > 0$. Wir dürfen also den Identitätssatz für Potenzreihen (Satz 10.14) verwenden (Koeffizientenvergleich) und schließen:

$$-4a_0 = 1, \quad -4a_1 = 0, \quad \forall n \geq 2 : a_{n-2} - 4a_n = 0$$

Damit ergibt sich induktiv:

$$\begin{aligned}
a_0 &= -\frac{1}{4} \\
a_1 &= 0 \\
a_{2n} &= \frac{1}{4} a_{2(n-1)} = \cdots = \left(\frac{1}{4}\right)^n a_0 = -\left(\frac{1}{4}\right)^n \frac{1}{4} = -\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \\
a_{2n+1} &= \frac{1}{4} a_{2(n-1)+1} = \cdots = \left(\frac{1}{4}\right)^n a_1 = 0
\end{aligned}$$

Als Letztes müssen wir nur sicherstellen, dass die gefundene Potenzreihe tatsächlich einen positiven Konvergenzradius hat. Satz 7.16 liefert sofort:

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{4}}} = 2 > 0$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x+1| < 2$ gilt also:

$$\frac{1}{x^2+2x-3} = -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}(x+1)^{2n}$$

Hinweis: Alternativ lässt sich die Aufgabe auch über die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{x^2+2x-3} = \frac{\frac{1}{4}}{x-1} - \frac{\frac{1}{4}}{x+3} = -\frac{1}{8}\left(\frac{1}{1-\frac{x+1}{2}} + \frac{1}{1-(-\frac{x+1}{2})}\right)$$

und der geometrischen Reihe lösen.

Aufgabe 59 (Übung)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$$

anhand der Definition (vgl. Beispiel (3) nach Lemma 11.1).

Lösungsvorschlag

Als monoton wachsende Funktion ist exp auf $[0,1]$ Riemann-integrierbar nach Satz 11.4. Als Zerlegung wählen wir

$$Z_n = \{\frac{j}{n}, j = 0,\ldots,n\}.$$

Wegen der Monotonie gilt (mit den Bezeichnungen aus der Vorlesung) $|I_j| = \frac{1}{n}$, $m_j = \mathrm{e}^{\frac{j}{n}}$, $M_j = \mathrm{e}^{\frac{j+1}{n}}$ und somit

$$s_{\exp}(Z_n) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}})^k = \frac{1-\mathrm{e}^{\frac{n}{n}}}{n-n\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}} = \frac{\mathrm{e}-1}{n\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-n}$$

sowie

$$S_{\exp}(Z_n) = \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}})^k = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\frac{\mathrm{e}-1}{n\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-n}$$

Per Definition des unteren/oberen Integrals gilt nun

$$\frac{\mathrm{e}-1}{n\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-n} = s_{\exp}(Z_n) \leqslant s_{\exp} \leqslant S_{\exp} \leqslant S_{\exp}(Z_n) = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\frac{\mathrm{e}-1}{n\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-n}.$$

Da $\mathrm{e}^{1/n} \to 1$ für $n \to \infty$ und

$$n\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - n = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1} \to 1 \quad (n \to \infty),$$

folgt $s_{\exp} = S_{\exp} = \mathrm{e}-1$, womit per Definition

$$\int_0^1 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}-1$$

folgt.

Aufgabe 60 (Tutorium)

Finden Sie eine alternative Lösung von **Aufgabe 26** (in $\mathbb{R}$) mit Hilfe der Differentiation von Potenzreihen: Bestimmen Sie für $x \in (-1, 1)$ den Wert der Reihen

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$, **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$.

Lösungsvorschlag

Für $x \in (-1, 1)$ gilt bekanntlich

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} =: f(x).$$

Nach Satz 10.12 gilt nun (durch Differenzierung beider Seiten)

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n + \frac{1}{1-x}$$

und somit

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Analog folgt

$$\begin{aligned} f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n + 3\sum_{n=1}^{\infty} nx^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n + \frac{3x}{(1-x)^2} + \frac{2}{1-x} \end{aligned}$$

und somit

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{3x}{(1-x)^2} - \frac{2}{1-x} = \frac{2 - 3x(1-x) - 2(1-x)^2}{(1-x)^3} = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}.$$