Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

WS 2018/2019
10.01.2019

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

11. Übungsblatt

Aufgabe 61 (Übung)

a) Beweisen Sie den erweiterten Mittelwertsatz: Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und $g\in R[a.b]$ mit $g\geqslant 0$ oder $g\leqslant 0$, so existiert ein $\xi\in[a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Folgern Sie daraus den Mittelwertsatz der Integralrechnung: Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, so existiert ein $\xi\in[a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

b) Sei $a\in\mathbb{R}$ fest. Untersuchen Sie die folgenden Ausdrücke auf Konvergenz berechnen Sie im Falle der Existenz den Grenzwert.

$$\text{(i)}\ \lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\int_{a-h}^{a+h}\cos(x^2)\,\mathrm{d}x,\qquad \text{(ii)}\ \lim_{h\to\infty}\frac{1}{h}\int_{a+h}^{a+2h}\log(x)\,\mathrm{d}x,\qquad \text{(iii)}\ \lim_{h\to 0+}\int_0^1 h^x\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 62 (Tutorium)

a) Sei $a>0$ und $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$ stetig. Beweisen Sie: Ist f gerade, also $f(-x)=f(x)$ für alle $x\in[-a,a]$, so gilt

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ist f ungerade, also $f(-x)=-f(x)$ für alle $x\in[-a,a]$, so gilt

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

b) Zeigen Sie, dass die Funktionen $F,G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definiert durch $F(x):=\int_0^{\sin(x)}\sin(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{d}t$ und $G(x):=\int_x^{\sin(x)}\sin(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{d}t$ auf $\mathbb{R}$ differenzierbar sind und berechnen Sie jeweils die Ableitung.

Aufgabe 63 (Übung)

a) Leiten Sie mit Hilfe partieller Integration eine Rekursionsformel für $\int\cos^n(x)\,\mathrm{d}x$ ($n\in\mathbb{N}$) her und zeigen Sie damit, dass für $k\in\mathbb{N}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2k}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\prod_{j=1}^k\frac{2j-1}{2j},\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2k+1}(x)\,\mathrm{d}x = \prod_{j=1}^k\frac{2j}{2j+1}.$$

b) Beweisen Sie mit Hilfe von **a)**, dass die Wallissche Produktfolge

$$w_n := \prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{4k^2-1}$$

konvergiert mit $\lim_{n\to\infty} w_n = \frac{\pi}{2}$.

c) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass sich f als Differenz zweier monoton wachsender, stetig differenzierbarer Funktionen schreiben lässt.

d) Beweisen Sie: Ist $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = 0$, so ist $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$.

Aufgabe 64 (Tutorium)

a) Bestimmen Sie die folgenden Integrale

(i) $\displaystyle\int_0^1 (1+2x)^3\,\mathrm{d}x$,	(ii) $\displaystyle\int_{-2}^2 \lvert x-1\rvert\,\mathrm{d}x$,	(iii) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$,
(iv) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x$,	(v) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}\,\mathrm{d}x$,	(vi) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x(1+\log(x))}\,\mathrm{d}x$,
(vii) $\displaystyle\int_1^4 \arctan\left(\sqrt{\sqrt{x}-1}\right)\mathrm{d}x$,	(viii) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$,	(ix) $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{(2x^2)}\sin(\mathrm{e}^{(x^2)})\,\mathrm{d}x$.

Erinnerung: $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $\sin(\pi/6) = \frac{1}{2}$, $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

b) Bestimmen Sie, wo möglich, die folgenden unbestimmten Integrale.

(i) $\displaystyle\int \arcsin(x)\,\mathrm{d}x$,	(ii) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$,	(iii) $\displaystyle\int (\log(x))^2\,\mathrm{d}x$,
(iv) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x$,	(v) $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \sin(ax)\,\mathrm{d}x$,	(vi) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+4x+8}\,\mathrm{d}x$.

Aufgabe 65 (Übung)

Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems.

$$y'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} y(x) + x, \qquad y(0) = 1.$$

Aufgabe 66 (Tutorium)

Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertprobleme.

a) $y'(x) = 2xy(x) + x^3, \qquad y(0) = \frac{1}{2}$.

b) $y'(x) = \frac{x^2-4xy(x)}{1+x^2}, \qquad y(0) = 1$.