Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 12. Übungsblatt

Aufgabe 67 (Übung)

Bestimmen Sie die maximale Lösung des folgenden Anfangswertproblems.

$$y'(x) = x\mathrm{e}^{-x}y^2(x), \qquad y(0) = 1.$$

Lösungsvorschlag

Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. In der Notation des Satzes 12.2, sei $I = \mathbb{R}$, $J = (0,\infty)$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto xe^{-x}$, und $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $y \mapsto y^2$. Eine Stammfunktion von f ist gegeben durch

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{x_0}^{x} f(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^x se^{-s}\,\mathrm{d}s \\ &\overset{P.I.}{=} [-se^{-s}]_{s=0}^{s=x} + \int_0^x e^{-s}\,\mathrm{d}s = [-se^{-s} - e^{-s}]_{s=0}^{s=x} = 1-(1+x)e^{-x} \end{aligned}$$

für alle $x \in I$. Eine Stammfunktion von $\frac{1}{g}$ ist gegeben durch

$$G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(s)}\,\mathrm{d}s = \int_1^y \frac{1}{s^2}\,\mathrm{d}s = 1 - \frac{1}{y}.$$

Nach Satz 12.2 ergibt sich die Lösung $y : I_{x_0} \to \mathbb{R}$ nun durch Auflösen der Gleichung $G(y(x)) = F(x)$ nach $y(x)$, also

$$y(x) = \frac{e^x}{1+x}$$

Dabei ist das Intervall I_{x_0} das größte Teilintervall von I mit $y_0 \in I_{x_0}$, auf dem y definiert ist und $y(I_{x_0}) \subseteq J = (0,\infty)$, also $I_{x_0} = (-1,\infty)$. Da y in -1 nicht stetig fortsetzbar ist, ist dies das maximale Existenzintervall.

Aufgabe 68 (Tutorium)

Bestimmen Sie die maximale Lösung der folgenden Anfangswertprobleme.

a) $y'(x) = \mathrm{e}^{y(x)}\sin(x), \qquad y(0) = -\log(3),$

b) $y'(x) = -\frac{x^2}{y^3(x)}, \qquad y(0) = \sqrt{2}.$

Lösungsvorschlag

a) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. In der Notation des Satzes 12.2, sei $I = \mathbb{R}$, $J = \mathbb{R}$, $f = \sin$ und $g = \exp$. Eine

Stammfunktion von f ist gegeben durch

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^x \sin(s)\,\mathrm{d}s = 1 - \cos(x).$$

Eine Stammfunktion von $\frac{1}{g}$ ist gegeben durch

$$G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(s)}\,\mathrm{d}s = \int_{-\log(3)}^{y} \mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s = 3 - \mathrm{e}^{-y}.$$

Nach Satz 12.2 ergibt sich die Lösung $y : I_{x_0} \to \mathbb{R}$ nun durch Auflösen der Gleichung $G(y(x)) = F(x)$ nach $y(x)$, also

$$y(x) = -\log(2 + \cos(x)).$$

Dabei ist das Intervall I_{x_0} das größte Teilintervall von I mit $y_0 \in I_{x_0}$, auf dem y definiert ist, also $I_{x_0} = \mathbb{R}$, was automatisch das maximale Existenzintervall ist.

b) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. In der Notation des Satzes 12.4, sei $I = \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto -x^2$ und $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $y \mapsto \frac{1}{y^3}$. Wegen $u_0 = \sqrt{2}$ bietet es sich an, $J = \mathbb{R}^+$ zu wählen (das größte Intervall, welches y_0 enthält und auf dem g das Vorzeichen von $g(u_0) = \frac{\sqrt{2}}{4} > 0$ hat). Eine Stammfunktion von f ist gegeben durch

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^x -s^2\,\mathrm{d}s = -\frac{x^3}{3}.$$

Eine Stammfunktion von $\frac{1}{g}$ ist gegeben durch

$$G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(s)}\,\mathrm{d}s = \int_{\sqrt{2}}^{y} y^3\,\mathrm{d}s = \frac{y^4}{4} - 1$$

Nach Satz 12.2 ergibt sich die Lösung $y : I_{x_0} \to \mathbb{R}$ nun durch Auflösen der Gleichung $G(y(x)) = F(x)$ nach $y(x)$, also

$$y(x) = \sqrt{2}\sqrt[4]{1 - \frac{x^3}{3}},$$

wobei das Vorzeichen von y durch $y_0 = \sqrt{2}$ festgelegt ist. Dabei ist das Intervall I_{x_0} das größte Teilintervall von I mit $y_0 \in I_{x_0}$, auf dem y definiert ist, also $I_{x_0} = (-\infty, \sqrt[3]{3})$. Da $\lim_{x \to \sqrt[3]{3}} y(x) = 0$ und 0 nicht im Definitionsbereich von g liegt, haben wir das maximale Existenzintervall gefunden.

Aufgabe 69 (Übung)

Seien $\gamma, \omega_0 > 0$ mit $\omega_0 > \gamma$. Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems.

$$y''(x) + 2\gamma y'(x) + \omega_0^2 y(x) = \sin(\omega_0 x), \qquad y(0) = 1,\, y'(0) = 0.$$

Lösungsvorschlag

Bei der Differentialgleichung handelt es sich um eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Zunächst bestimmen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -\gamma \pm \underbrace{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}_{<0} = -\gamma \pm \mathrm{i}\underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}_{=:\omega}$$

Nach Satz 12.4 der Vorlesung ist also

$$y_h(x) = c_1 e^{-\gamma x}\cos(\omega x) + c_2 e^{-\gamma x}\sin(\omega x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y''(x) + 2\gamma y'(x) + \omega^2 y(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

In der Notation der Vorlesung (nach Satz 12.5) gilt für unsere Inhomogenität $m = 0$, $\alpha = 0$ und $\beta = \omega_0$. Da $\mathrm{i}\omega_0$ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = A\cos(\omega_0 x) + B\sin(\omega_0 x)$$

für eine spezielle Lösung der Differentialgleichung. Die Ableitungen sind durch

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= \omega_0\,(-A\sin(\omega_0 x) + B\cos(\omega_0 x)) \\ y_p''(x) &= \omega_0^2\,(-A\cos(\omega_0 x) - B\sin(\omega_0 x)) \end{aligned}$$

gegeben. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$\begin{aligned} y_p''(x) + 2\gamma y_p'(x) + \omega_0^2 y_p(x) &= \left(-A\omega_0^2 + B2\gamma\omega_0 + A\omega_0^2\right)\cos(\omega_0 x) + \left(-B\omega_0^2 - A2\gamma\omega_0 + B\omega_0^2\right)\sin(\omega_0 x) \\ &= 2\gamma\omega_0 B\cos(\omega_0 x) - 2\gamma\omega_0 A\sin(\omega_0 x) \\ &\overset{!}{=} \sin(\omega_0 x) \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist für $B = 0$ und $A = -\frac{1}{2\gamma\omega_0}$ erfüllt. Also ist

$$y_p(x) = -\frac{1}{2\gamma\omega_0}\cos(\omega_0 x)$$

eine spezielle Lösung der Differentialgleichung und die maximale Lösung des Anfangswertproblems ist durch

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^{-\gamma x}\cos(\omega x) + c_2 e^{-\gamma x}\sin(\omega x) - \frac{1}{2\gamma\omega_0}\cos(\omega_0 x)$$

gegeben, wobei die Konstanten c_1 und c_2 so gewählt werden müssen, dass die Anfangswertbedingungen erfüllt sind. Es ist

$$c_1 - \frac{1}{2\gamma\omega_0} = y(0) \overset{!}{=} y_0 = 1,$$

also $c_1 = 1 + \frac{1}{2\gamma\omega_0}$, und wegen

$$y'(x) = -\gamma e^{-\gamma x}\cos(\omega x) - \omega e^{-\gamma x}\sin(\omega x) - c_2\gamma e^{-\gamma x}\sin(\omega x) + c_2\omega e^{-\gamma x}\cos(\omega x) + \frac{1}{2\gamma}\sin(\omega_0 x)$$

ist

$$-c_1\gamma + c_2\omega = y'(0) \stackrel{!}{=} y_1 = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{c_1\gamma}{\omega} = \frac{1}{\omega}\left(\gamma + \frac{1}{2\omega_0}\right)$$

und die maximale Lösung des Anfangswertproblems lautet:

$$y(x) = \left(1 + \frac{1}{2\gamma\omega_0}\right)e^{-\gamma x}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}x\right) + \frac{1}{\omega}\left(\gamma + \frac{1}{2\omega_0}\right)e^{-\gamma x}\sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}x\right) - \frac{1}{2\gamma\omega_0}\cos(\omega_0 x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 70 (Tutorium)

Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertprobleme

a) $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = \mathrm{e}^{2x}, \qquad y(0) = 1, y'(0) = 0,$

b) $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = \mathrm{e}^{x}\cos(x), \quad y(\pi/2) = 0, y'(\pi/2) = 0.$

Lösungsvorschlag

a) Bei der Differentialgleichung handelt es sich um eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Zunächst bestimmen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \pm \sqrt{1-1} = -1$$

Nach Satz 12.4 der Vorlesung ist also

$$y_h(x) = c_1 e^{-x} + c_2 t e^{-x}$$

die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0$$

In der Notation der Vorlesung (nach Satz 12.5) gilt für unsere Inhomogenität $m = 0$, $\alpha = 2$ und $\beta = 0$. Da 2 keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = Ae^{2x}$$

für eine spezielle Lösung der Differentialgleichung. Die Ableitungen sind durch

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= 2Ae^{2x}, \\ y_p''(x) &= 4Ae^{2x} \end{aligned}$$

gegeben. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$y_p''(x) + 2y_p'(x) + y_p(x) = 4Ae^{2x} + 2\cdot 2Ae^{2x} + Ae^{2x} = 9Ae^{2x} \stackrel{!}{=} e^{2x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Diese Gleichung ist für $A = \frac{1}{9}$ erfüllt. Also ist

$$y_p(x) = \frac{1}{9}e^{2x}$$

eine spezielle Lösung der Differentialgleichung und die maximale Lösung des Anfangswertproblems ist durch

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + \frac{1}{9}e^{2x}$$

gegeben, wobei die Konstanten c_1 und c_2 so gewählt werden müssen, dass die Anfangswertbedingungen erfüllt sind. Es ist

$$y(0) = c_1 + \frac{1}{9} \overset{!}{=} y_0 = 1 \Rightarrow c_1 = \frac{8}{9}$$

und wegen

$$y'(x) = -\frac{8}{9}e^{-x} - c_2 x e^{-x} + c_2 e^{-x} + \frac{2}{9}e^{2x}$$

ist

$$y'(0) = -\frac{8}{9} + c_2 + \frac{2}{9} = c_2 - \frac{6}{9} \overset{!}{=} y_1 = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{6}{9}$$

und die maximale Lösung des Anfangswertproblems lautet:

$$y(x) = \frac{8}{9}e^{-x} + \frac{6}{9}xe^{x} + \frac{1}{9}e^{2x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

b) Das charakteristische Polynom ist gegeben durch $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$, welche als Nullstellen $1 \pm \mathrm{i}$ besitzt. Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist demnach gegeben durch

$$y_h(x) = c_1 \mathrm{e}^x \cos(x) + c_2 \mathrm{e}^x \sin(x).$$

Die rechte Seite hat die Form $\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x)$ mit $\alpha = \beta = 1$. Da $\alpha + \mathrm{i}\beta$ somit eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, lautet der korrekte Ansatz für die partikuläre Lösung

$$y_p(x) = \mathrm{e}^x(Ax\cos(x) + Bx\sin(x)).$$

Es ergibt sich

$$y_p'(x) = y_p(x) + \mathrm{e}^x(A\cos(x) + B\sin(x) - Ax\sin(x) + Bx\cos(x))$$

sowie

$$\begin{aligned} y_p''(x) &= y_p'(x) + \mathrm{e}^x(A\cos(x) + B\sin(x) - Ax\sin(x) + Bx\cos(x)) \\ &\quad + \mathrm{e}^x(-A\sin(x) + B\cos(x) - A\sin(x) + B\cos(x) + Ax\cos(x) - Bx\sin(x)) \\ &= y_p'(x) + \mathrm{e}^x(A\cos(x) + B\sin(x) - Ax\sin(x) + Bx\cos(x)) + 2\mathrm{e}^x(B\cos(x) - A\sin(x)) \\ &\quad + \underbrace{\mathrm{e}^x(Ax\cos(x) + Bx\sin(x))}_{y_p(x)} - 2Bx\mathrm{e}^x\sin(x) \\ &= 2y'(p) + 2\mathrm{e}^x(B\cos(x) - A\sin(x)) - 2Bx\mathrm{e}^x\sin(x) \end{aligned}$$

Setzen wir dies in die inhomogene Differentialgleichung ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} y_p''(x) - 2y_p'(x) + 2y_p(x) &= 2\mathrm{e}^x(B\cos(x) - A\sin(x)) - 2Bx\mathrm{e}^x\sin(x) + 2\mathrm{e}^x(Ax\cos(x) + Bx\sin(x)) \\ &= 2B\mathrm{e}^x\cos(x) - 2A\mathrm{e}^x\sin(x) + 2Ax\mathrm{e}^x\cos(x) \overset{!}{=} \mathrm{e}^x\cos(x). \end{aligned}$$

Somit gilt $A = 0$, $B = \frac{1}{2}$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist also gegeben durch

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^x\cos(x) + c_2\mathrm{e}^x\sin(x) + \frac{1}{2}x\mathrm{e}^x\sin(x).$$

Einsetzen der Anfangswerte liefert

$$0 \overset{!}{=} y(\pi/2) = c_2 e^{\pi/2} + \frac{\pi}{4} e^{\pi/2},$$

also $c_2 = -\frac{\pi}{4}$. Wegen

$$y'(x) = e^x \sin(x)\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} - c_1\right) + e^x \cos(x)\left(\frac{\pi}{4} + c_1\right) + \frac{1}{2} x e^x (\sin(x) + \cos(x))$$

folgt schließlich

$$0 \overset{!}{=} y'(\pi/2) = e^{\pi/2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} - c_1\right) + \frac{\pi}{4} e^{\pi/2},$$

also $c_1 = \frac{1}{2}$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist demnach gegeben durch

$$y(x) = \frac{1}{2} e^x \cos(x) - \frac{\pi}{4} e^x \sin(x) + \frac{1}{2} x e^x \sin(x) = \frac{e^x}{2}\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\sin(x) + \cos(x)\right).$$

Aufgabe 71 (Übung)

a) Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+3) e^{nx}$$

konvergiert. Bestimmen Sie für diese x den Wert der Reihe.

b) Berechnen Sie, falls existent, den Wert des Integrals

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}\, dx$$

Lösungsvorschlag

a) Wir nutzen das Wurzelkriterium: Wegen

$$\sqrt[n]{|n(n+3)e^{nx}|} = \sqrt[n]{n(n+3)}\, e^x \xrightarrow{n \to \infty} e^x$$

gilt: Für $e^x < 1$ konvergiert die Reihe, für $e^x > 1$ divergiert sie. Das bedeutet: Für $x < 0$ liegt Konvergenz, für $x > 0$ Divergenz vor. Für $x = 0$ divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+3) \cdot 1$, da $n(n+3) \nrightarrow 0$. Insgesamt: Genau für $x < 0$ konvergiert die Reihe.

Nun sei $x < 0$. Wir setzen $y := e^x$ und wollen

$$f(y) := \sum_{n=1}^{\infty} n(n+3) y^n = y \sum_{n=1}^{\infty} n(n+3) y^{n-1}$$

berechnen. Offenbar besitzt $g(y) := f(y)/y$ die Stammfunktion

$$G(y) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+3) y^n = \frac{1}{y^2} \sum_{n=1}^{\infty} (n+3) y^{n+2}.$$

Nun hat wiederum $h(y) := y^2 G(y)$ die Stammfunktion

$$H(y) = \sum_{n=1}^{\infty} y^{n+3} \overset{k:=n-1}{=} y^4 \sum_{k=0}^{\infty} y^k \overset{|y|<1}{=} \frac{y^4}{1-y}.$$

Daraus ergibt sich

$$h(y) = H'(y) = \frac{4y^3(1-y)+y^4}{(1-y)^2} = \frac{4y^3-3y^4}{(1-y)^2}, \qquad G(y) = \frac{h(y)}{y^2} = \frac{4y-3y^2}{(1-y)^2}.$$

Also ist

$$g(y) = G'(y) = \frac{(4-6y)(1-y)^2 + (4y-3y^2)2(1-y)}{(1-y)^4} = \frac{4-2y}{(1-y)^3}.$$

Schließlich ergibt sich dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+3)\mathrm{e}^{nx} = f(y) = yg(y) = \frac{4y-2y^2}{(1-y)^3} = \frac{4\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{2x}}{(1-\mathrm{e}^x)^3}.$$

b) Nach AUFGABE 36 **d)** ist die Funktionenreihe im Integranden gleichmäßig konvergent. Die Summanden sind stetig und somit Riemann-integrierbar auf $[0,1]$, weshalb wegen Satz 13.1 gilt, dass

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{1}{n^2+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^1 \frac{1}{(\frac{x}{n})^2+1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}[\arctan(x/n)]_0^1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(1/n)}{n}\end{aligned}$$

und die letzte Reihe konvergent ist.

AUFGABE 72 (TUTORIUM)

Für $n \in \mathbb{N}$ seien die Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_n(x) = \frac{2nx^2}{(1+n^3x^2)^2}.$$

Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge (f_n) gleichmäßig konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

LÖSUNGSVORSCHLAG

Wir zeigen zuerst, dass die Funktionenfolge (f_n) auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$; $f(x) = 0$ konvergiert. Da $w^2 \geq 0$ für alle $w \in \mathbb{R}$, ist klar, dass $f_n(x) \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0,1]$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist f_n nach Quotienten– und Kettenregel stetig differenzierbar und wir haben

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= \frac{4nx(1+n^3x^2)^2 - 2nx^2 \cdot 2(1+n^3x^2) \cdot 2n^3x}{(1+n^3x^2)^4} \\ &= \frac{4nx(1+n^3x^2-2n^3x^2)}{(1+n^3x^2)^3} = \frac{4nx(1-n^3x^2)}{(1+n^3x^2)^3}\end{aligned}$$

für $x \in [0,1]$. Nun können wir ablesen, dass genau dann $f_n'(x) = 0$ gilt, wenn $x = 0$ oder

$$1 - n^3 x^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 = n^{-3} \quad \overset{x\in[0,1]}{\Longleftrightarrow} \quad x = n^{-\frac{3}{2}}.$$

Genauso sehen wir, dass $f_n'(x) > 0$ für $x \in (0, n^{-\frac{3}{2}})$ und $f_n'(x) < 0$ für $x \in (n^{-\frac{3}{2}}, 1]$. Somit ist f_n streng monoton steigend auf $(0, n^{-\frac{3}{2}})$ und streng monoton fallend auf $(n^{-\frac{3}{2}}, 1]$. Folglich besitzt f_n ein globales Maximum in $x_n := n^{-\frac{3}{2}}$ mit dem Funktionswert

$$f_n(x_n) = \frac{2nn^{-3}}{(1 + n^3 n^{-3})} = \frac{1}{2n^2}.$$

Das bedeutet, dass $0 \le f_n(x) \le f_n(x_n) = \frac{1}{2n^2} \to 0$ für $n \to \infty$ für alle $x \in [0,1]$. Also konvergiert die Folge (f_n) gleichmäßig gegen f. Satz 13.1 liefert nun

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$