Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

WS 2018/2019
24.01.2019

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

13. Übungsblatt

Aufgabe 73 (Übung)

In Abhängigkeit von $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sei das uneigentliche Integral

$$I_s := \int_0^\infty \frac{1}{x^s + x^{1/s}}\,dx$$

gegeben. Bestimmen Sie alle s, für die I_s konvergiert.

Aufgabe 74 (Tutorium)

Es sei $\lambda > 0$. Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ das uneigentliche Integral

$$I_n(\lambda) := \int_0^\infty x^n \mathrm{e}^{-\lambda x}\,dx$$

konvergiert, und berechnen Sie $I_n(\lambda)$.

Hinweis: Berechnen Sie $I_0(1)$, finden Sie dann mit partieller Integration eine Rekursionsformel für $I_n(1)$ und folgern Sie schließlich den Wert von $I_n(\lambda)$ aus demjenigen von $I_n(1)$ mit Hilfe einer Substitution.

Aufgabe 75 (Übung)

a) Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert (wobei in (i) $s < 0$ und $x \in \mathbb{R}$ sei).

(i) $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{st}\cos(tx)\,\mathrm{d}t$, (ii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{t\log(t)}{\sinh(t) - t}\,\mathrm{d}t$.

b) Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz.

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t} - t^2}\,\mathrm{d}t$, (ii) $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\log(1+t)\,\mathrm{d}t$.

c) Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{k=3}^\infty \frac{(\log k)^2}{k^{\log\log k}}$ auf Konvergenz mit Hilfe des Integralvergleichskriteriums.

Aufgabe 76 (Tutorium)

a) Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{3} \frac{e^{2t}}{1+e^t}\,dt$, (ii) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \log(|t|)\,dt$.

b) Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz.

(i) $\displaystyle\int_0^1 (\log(t))^4\,dt$, (ii) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\pi}} \sin\left(\frac{1}{t}\right)dt$.

c) Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(\log k)^{\log k}}$ auf Konvergenz mit Hilfe des Integralvergleichskriteriums.

Aufgabe 77 (Übung)

a) Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen Untervektorräume bzw. affine Unterräume des $\mathbb{K}$-Vektorraums V sind.

(i) $U_a := \{(a_n) \in V = \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \lim_{n\to\infty} a_n = a\}$, $a \in \mathbb{K}$ fest,

(ii) $U := \{(x_1, x_2) \in V = \mathbb{K}^2 \mid x_1^2 + x_2^4 = 0\}$.

b) Beweisen Sie Satz 14.5 (1): Sei $\emptyset \neq M \subseteq V$ und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann ist $\mathrm{lin}(M)$ der Durchschnitt aller Untervektorräume von V, die M enthalten.

c) Seien $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ und $n \in \mathbb{N}$. Weiter seien $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ paarweise verschiedene Zahlen (d.h. $\beta_i \neq \beta_j$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$). Zeigen Sie: Die Funktionen $f_1, \ldots, f_n \in V$, $f_i(x) = e^{\beta_i x}$ für alle $1 \leq i \leq n$ und alle $x \in \mathbb{R}$, sind linear unabhängig.

Aufgabe 78 (Tutorium)

a) Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen Untervektorräume bzw. affine Unterräume des $\mathbb{K}$-Vektorraums V sind.

(i) $U := \{(a_n) \in V = \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent$\}$,

(ii) $U := \{(x_1, x_2, x_3) \in V = \mathbb{K}^3 \mid x_1 = 2x_2 = -3x_3\}$,

(iii) $U := \{f \in V = C^1[0,1] \mid \int_0^1 f(x)\,dx + f'(1/2) = 1\}$,

(iv) $U := \{f \in V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f$ hat mindestens eine Nullstelle$\}$.

b) Zeigen Sie, dass die Funktionen $\cosh, \cosh^2 \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ linear unabhängig sind. Gilt dies auch für die Funktionen 1, $\sinh^2$ und $\cosh^2$?